Exercícios e simulações — Veículos Elétricos e Híbridos

Módulo 1 — Dinâmica e Sistemas Veiculares

Material preparatório de 21/11/2026 (horário de Brasília), versão 1.0.0. 180 exercícios em 6 disciplinas, com resolução passo a passo.

Material preparatório, não oficial. Estes exercícios foram elaborados para estudo, com fórmulas usuais de cada tema. Não substituem ementas, listas ou avaliações de um curso. Os números são realistas, mas ilustrativos.

O simulador interativo (controles e gráfico) está no site, junto de cada enunciado do Módulo 1: https://www.wilsontecnologia.com/simulacoes-veiculos-eletricos

Disciplinas neste PDF

1. Dinâmica Veicular (36 h) — 30 exercícios
2. Gestão de Projetos de Inovação Tecnológica (12 h) — 30 exercícios
3. Sistemas de Freios (28 h) — 30 exercícios
4. Sistemas de Suspensão e Direção (28 h) — 30 exercícios
5. Sistemas de Propulsão ICE e Transmissões xHEV (20 h) — 30 exercícios
6. Simulação Computacional da Dinâmica Veicular (16 h) — 30 exercícios

Cada exercício traz enunciado, conceito, fórmula, origem, passos, resposta, interpretação e um erro comum a evitar. Tente resolver antes de ler a resolução.

Dinâmica Veicular (36 h)

1.1. Resistências e potência a 100 km/h (Básico)

Enunciado. O up! roda em reta, em piso plano e a 100 km/h, em velocidade constante. Calcule a força de resistência de rolamento, a força aerodinâmica, a resistência total e a potência na roda. Use os dados-base do veículo.

Conceito. Em velocidade constante a aceleração é nula, então a força de tração na roda equilibra exatamente as resistências. No plano, as duas parcelas usuais são o rolamento, quase constante, e o arrasto aerodinâmico, que cresce com o quadrado da velocidade. A potência é essa força total vezes a velocidade, e precisa estar em watt no SI.

Fórmula. $F_r = C_r m g , F_a = (1)/(2) \rho C_d A , P = F v$

De onde vem. O rolamento vem de $F_r = C_r N$, e no plano a normal é o peso $N = m g$. O arrasto é a força de pressão e atrito do ar, escrita na forma clássica $(1/2) \rho C_d A v^2$. A potência mecânica é a definição $P = F v$, com F e v na mesma direção.

Resolução

1. **Converter a velocidade para o SI.** $v = 100 \text{ km/h} \div 3{,}6 = 27{,}78 \text{ m/s}$. O fator 3,6 existe porque 1 m/s = 3,6 km/h.
2. **Calcular o rolamento.** $F_r = 0{,}012 \times 900 \text{ kg} \times 9{,}81 \text{ m/s}^2 = 105{,}9 \text{ N}$.
3. **Calcular o arrasto.** O fator $(1/2) \rho C_d A = 0{,}5 \times 1{,}225 \text{ kg/m}^3 \times 0{,}32 \times 2{,}10 \text{ m}^2 = 0{,}4116 \text{ kg/m}$. Então $F_a = 0{,}4116 \times (27{,}78 \text{ m/s})^2 = 0{,}4116 \times 771{,}7 \text{ m}^2/\text{s}^2 = 317{,}6 \text{ N}$.
4. **Somar e obter a potência.** $F = 105{,}9 \text{ N} + 317{,}6 \text{ N} = 423{,}5 \text{ N}$. $P = 423{,}5 \text{ N} \times 27{,}78 \text{ m/s} = 11\,765 \text{ W} = 11{,}76 \text{ kW}$.

Resposta. $F_r = 105{,}9$ N; $F_a = 317{,}6$ N; $F = 423{,}5$ N; $P = 11{,}76$ kW.

Interpretação. A cerca de 100 km/h o arrasto já é cerca de três vezes o rolamento: a maior parte da potência de cruzeiro vai para empurrar o ar, não para vencer o pneu.

Erro comum a evitar. Esquecer de converter km/h para m/s. Se você usar v = 100 no arrasto, F_a e P ficam absurdos, cerca de 13 vezes maiores.

1.2. Transferência de carga na frenagem (Básico)

Enunciado. O up! freia em reta com desaceleração de 0,70 g. Calcule a transferência de carga longitudinal e as forças normais dinâmicas nos eixos dianteiro e traseiro.

Conceito. Na frenagem a inércia atua na altura do centro de gravidade e gera um momento de cabeceio. Esse momento aumenta a normal do eixo dianteiro e diminui a do traseiro, embora o peso total continue o mesmo. É por isso que o freio dianteiro é mais robusto.

Fórmula. $\Delta F_z = (m\ a\ h)/(L)$

De onde vem. O momento de inércia em torno do CG é m a × h. O par de variações de normal, separado pelo entre-eixos L, equilibra esse momento: $\Delta F_z \times L = m\ a\ h$. Daí $\Delta F_z = m\ a\ h / L$. As normais estáticas saem da repartição de peso: 55 % à frente e 45 % atrás.

Resolução

1. **Converter a desaceleração.** a = 0,70 × 9,81 m/s² = 6,867 m/s².
2. **Calcular a transferência.** ΔF_z = 900 kg × 6,867 m/s² × 0,50 m / 2,40 m = 1 288 N.
3. **Normais estáticas.** F_{zd0} = 0,55 × 900 × 9,81 = 4 856 N e F_{zt0} = 0,45 × 900 × 9,81 = 3 973 N. A soma é m g = 8 829 N.
4. **Normais dinâmicas.** Na frenagem a carga vai para a frente: F_{zd} = 4 856 + 1 288 = 6 144 N (626 kgf) e F_{zt} = 3 973 − 1 288 = 2 685 N (274 kgf). A soma permanece 8 829 N.

Resposta. ΔF_z = 1 288 N; eixo dianteiro 6 144 N (626 kgf); eixo traseiro 2 685 N (274 kgf).

Interpretação. O eixo dianteiro passa a carregar cerca de 70 % do peso. A força de atrito disponível à frente sobe na mesma proporção, e a de trás cai.

Erro comum a evitar. Somar a transferência nos dois eixos, ou esquecer que na aceleração o sinal se inverte (a carga vai para trás). Outro erro é usar 0,70 m/s² no lugar de 0,70 g.

1.3. Velocidade máxima em curva plana (Básico)

Enunciado. O up! aborda uma curva de raio 40 m, em piso plano e seco ($\mu = 0{,}80$), sem acerto de suspensão extra e desprezando a transferência lateral. Qual é a maior velocidade em que o carro ainda não desliza?

Conceito. Em curva plana a força centrípeta $m\,v^2 / R$ vem do atrito lateral dos pneus. O teto desse atrito é μN, e no plano $N = m\,g$, então a aceleração lateral máxima é $\mu\,g$. É um modelo de ponto material: não inclui rolagem, cambagem nem transferência de carga.

Fórmula. $(m\,v^2)/(R) = \mu\,m\,g \Rightarrow v = \sqrt{(\mu\,g\,R)}$

De onde vem. A 2ª lei na direção radial é $m\,v^2 / R = F_{atrito} \le \mu N$. Com $N = m\,g$ o m se cancela e resta $v^2 = \mu\,g\,R$. A raiz positiva é a velocidade-limite.

Resolução

1. **Aceleração lateral máxima.** $a_y = 0{,}80 \times 9{,}81\ m/s^2 = 7{,}848\ m/s^2$.
2. **Velocidade no limite.** $v = \sqrt{(7{,}848\ m/s^2 \times 40\ m)} = \sqrt{313{,}9\ m^2/s^2} = 17{,}72\ m/s$.
3. **Converter para km/h.** $v = 17{,}72 \times 3{,}6 = 63{,}8\ km/h$.

Resposta. $v_{máx} = 17{,}72\ m/s = 63{,}8\ km/h$.

Interpretação. Num raio de 40 m, mesmo com piso seco, o limite de deslizamento deste modelo é da ordem de 64 km/h. Cambagem, rolagem e transferência lateral alteram um pouco o número no carro real.

Erro comum a evitar. Usar o raio em quilômetros ou deixar a velocidade em km/h dentro da raiz. Outro erro é escrever $v = \mu\,g\,R$, sem a raiz.

1.4. Só a resistência de rolamento (Básico)

Enunciado. Calcule o peso do up! e a força de resistência de rolamento em piso plano, com $C_r = 0{,}012$. Que fração do peso é essa força?

Conceito. O rolamento representa a energia gasta para deformar o pneu (e um pouco o piso) a cada volta da roda. No modelo mais simples ele é proporcional à normal, com constante C_r típica de um pneu de passeio em asfalto bom.

Fórmula. $G = m\,g\ ,\ F_r = C_r\,G$

De onde vem. No plano a normal é o peso $G = m\,g$. A definição do coeficiente de rolamento é $F_r = C_r N$, logo $F_r / G = C_r$.

Resolução

1. **Peso.** $G = 900\ kg \times 9{,}81\ m/s^2 = 8\,829\ N$.
2. **Rolamento.** $F_r = 0{,}012 \times 8\,829\ N = 105{,}9\ N$.
3. **Fração do peso.** $F_r / G = 0{,}012 = 1{,}2\ \%$ do peso.

Resposta. $G = 8\,829\ N$; $F_r = 105{,}9\ N$, equivalente a 1,2 % do peso.

Interpretação. Um C_r de 1,2 % é um pneu de passeio razoável. Pneus de baixa resistência (elétricos) andam mais perto de 0,7 % a 1,0 % e reduzem sobretudo o consumo em cidade e a potência de cruzeiro baixo.

Erro comum a evitar. Usar massa no lugar de peso (900 N em vez de 8 829 N) ou esquecer o g. Também não some o arrasto aqui: o enunciado pede só o rolamento.

1.5. Energia cinética a 80 km/h (Básico)

Enunciado. Calcule a velocidade do up! em m/s e a energia cinética de translação a 80 km/h.

Conceito. A energia cinética de translação é o trabalho necessário para acelerar a massa até aquela velocidade, e o que os freios (ou o motor em recuperação) precisam retirar para parar. Ela cresce com o quadrado da velocidade.

Fórmula. $E_c = (1)/(2)\ m$

De onde vem. A definição vem do trabalho da resultante: $W = \int m\,a\,dx = \int m\,v\,dv = (1/2)\,m\,v^2$, tomando v inicial nula. Aqui desprezamos a parcela rotacional das rodas, que aparece em exercícios mais à frente.

Resolução

1. **Converter a velocidade.** v = 80 km/h ÷ 3,6 = 22,22 m/s.
2. **Calcular a energia.** $E_c = 0{,}5 \times 900\ \text{kg} \times (22{,}22\ \text{m/s})^2 = 450 \times 493{,}8\ \text{m}^2/\text{s}^2 = 222\,222\ \text{J} = 222{,}2\ \text{kJ}$.

Resposta. v = 22,22 m/s; E_c = 222,2 kJ.

Interpretação. São cerca de 222 kJ, ou 0,0617 kWh — pouca energia na escala de uma bateria, mas bastante calor se for dissipada toda nos discos numa só parada.

Erro comum a evitar. Usar 80 no lugar de 22,22 m/s, ou esquecer o 1/2. Outro erro é reportar o resultado em kWh sem converter: 222 222 / 3 600 000 = 0,0617 kWh, não 222 kWh.

1.6. Rampa de 5 % a 60 km/h constantes (Básico)

Enunciado. O up! sobe uma rampa de 5 % a 60 km/h constantes. Calcule a componente do peso na rampa, as resistências de rolamento e de arrasto, a força total e a potência na roda.

Conceito. Em rampa aparece uma terceira resistência: a componente do peso paralela ao piso, m g sen θ. Uma rampa de 5 % significa tan θ = 0,05 (sobe 5 m a cada 100 m de horizontal). Em velocidade constante a tração equilibra rolamento, arrasto e essa componente.

Fórmula. `F_g = m g sen θ , sen θ = )} />  , P = F v`

De onde vem. Se i = tan θ é a inclinação, então sen θ = i / √(1 + i²). Para 5 % a diferença entre sen θ e o próprio 0,05 é pequena, mas a fórmula exata é esta. O rolamento, com boa aproximação neste ângulo, ainda usa C_r m g (a normal cai só com cos θ ≈ 0,999).

Resolução

1. **Velocidade e seno da rampa.** v = 60 / 3,6 = 16,67 m/s. sen θ = 0,05 / √(1 + 0,05²) = 0,05 / 1,00125 = 0,04994.
2. **Componente de gravidade.** F_g = 900 × 9,81 × 0,04994 = 440,9 N. A aproximação m g × 0,05 daria 441,5 N, só 0,6 N a mais.
3. **Rolamento e arrasto.** F_r = 105,9 N. F_a = 0,4116 × (16,67)² = 0,4116 × 277,8 = 114,3 N.
4. **Total e potência.** F = 105,9 + 114,3 + 440,9 = 661,2 N. P = 661,2 × 16,67 = 11 020 W = 11,02 kW.

Resposta. F_g = 440,9 N; F_r = 105,9 N; F_a = 114,3 N; F = 661,2 N; P = 11,02 kW.

Interpretação. A 60 km/h na rampa de 5 %, a gravidade já é a maior parcela — quase quatro vezes o arrasto. Por isso uma subida curta pede bem mais do que o cruzeiro no plano.

Erro comum a evitar. Tratar 5 % como θ = 5° (sen 5° ≈ 0,087, 74 % a mais de F_g). Por cento de rampa é a tangente, não o ângulo em graus.

1.7. Aceleração 0–60 km/h com força constante (Básico)

Enunciado. Uma força de tração constante de 2 000 N atua no up!, em piso plano. Despreze o arrasto (partida em baixa velocidade) e desconte só o rolamento. Calcule a aceleração, o tempo e a distância de 0 a 60 km/h.

Conceito. Com força líquida constante a aceleração é constante e valem as equações da cinemática uniforme. O modelo serve para uma primeira estimativa em baixa velocidade, quando o arrasto ainda é pequeno.

Fórmula. $a = (F_x - F_r)/(m)\ ,\ v = a\,t\ ,\ s = (1)/(2)\,a$

De onde vem. A 2ª lei no plano é m a = F_x − F_r − F_a. Com F_a ≈ 0, a = (F_x − F_r)/m. Integrando a constante: v = a t e s = (1/2) a t², a partir do repouso.

Resolução

1. **Força líquida e aceleração.** F_líq = 2 000 N − 105,9 N = 1 894,1 N. a = 1 894,1 / 900 = 2,105 m/s².
2. **Converter o alvo.** v = 60 / 3,6 = 16,67 m/s.
3. **Tempo e distância.** t = 16,67 / 2,105 = 7,92 s. s = 0,5 × 2,105 × (7,92)² = 66,0 m.

Resposta. a = 2,10 m/s²; t = 7,92 s; s = 66,0 m.

Interpretação. Com cerca de 2 kN na roda, o compacto faz 0–60 km/h em uns 8 s e 66 m. O arrasto, ainda pequeno, já começaria a alongar um pouco esse tempo no fim do trecho.

Erro comum a evitar. Usar F_x / m sem descontar o rolamento, ou calcular s = v t (isso valeria para velocidade média v, não para v final: a distância correta é (1/2) v t = 66 m, não 132 m).

1.8. Normais estáticas nos eixos (Básico)

Enunciado. Com o up! parado em piso plano e repartição 55 % dianteira / 45 % traseira, calcule as forças normais em cada eixo e as distâncias do CG aos eixos.

Conceito. Parado, cada eixo carrega a parcela do peso correspondente à posição longitudinal do CG. Quanto mais o CG se aproxima de um eixo, maior a normal daquele eixo. Essas normais são o ponto de partida da transferência de carga.

Fórmula. $F_{zd0} = (m\,g\,\ell_r)/(L)\ ,\ \ell_r = 0{,}55\,L\ ,\ \ell_f = 0{,}45\,L$

De onde vem. O somatório de momentos em torno do eixo traseiro dá F_zd0 × L = m g × ℓ_r, logo a normal dianteira é proporcional à distância do CG ao eixo de trás. Se 55 % do peso está à frente, ℓ_r = 0,55 L.

Resolução

1. **Normais.** F_zd0 = 0,55 × 8 829 N = 4 856 N. F_zt0 = 0,45 × 8 829 N = 3 973 N.
2. **Posição do CG.** ℓ_r = 0,55 × 2,40 m = 1,32 m (CG ao eixo traseiro). ℓ_f = 0,45 × 2,40 m = 1,08 m (CG ao eixo dianteiro).

Resposta. F_zd0 = 4 856 N; F_zt0 = 3 973 N; ℓ_f = 1,08 m; ℓ_r = 1,32 m.

Interpretação. O CG está 12 cm à frente do meio do entre-eixos. Isso é típico de um carro de tração dianteira, com o conjunto motriz no capô.

Erro comum a evitar. Inverter ℓ_f e ℓ_r: a maior distância é até o eixo que carrega menos. O eixo dianteiro, mais carregado, está mais perto do CG.

1.9. Aceleração lateral em curva (Básico)

Enunciado. O up! faz uma curva plana de raio 50 m a 40 km/h. Calcule a aceleração lateral em m/s² e em g, e compare com o limite μ g = 0,80 g.

Conceito. A aceleração centrípeta v² / R é a demanda lateral do pneu naquela curva. Compará-la com μ g mostra a margem até o deslizamento, no modelo simples de atrito.

Fórmula. a_y =

De onde vem. Em trajetória circular a aceleração normal é v² / R, dirigida ao centro. Dividir por g expressa o resultado na escala em que se fala de atrito e de conforto.

Resolução

1. **Converter a velocidade.** v = 40 / 3,6 = 11,11 m/s.
2. **Aceleração lateral.** a_y = (11,11)² / 50 = 123,5 / 50 = 2,47 m/s².
3. **Em g e margem.** a_y / g = 2,47 / 9,81 = 0,252 g. O limite é 0,80 g, logo esta curva usa cerca de 31 % do atrito disponível.

Resposta. a_y = 2,47 m/s² = 0,252 g, cerca de 31 % do limite de 0,80 g.

Interpretação. A 40 km/h num raio de 50 m a demanda é suave, típica de uma curva urbana. Ainda haveria muita margem para frear ou acelerar sem estourar o círculo de atrito.

Erro comum a evitar. Deixar 40 km/h na fórmula, ou dividir por 50 km em vez de 50 m. O raio precisa estar em metro se v está em m/s.

1.10. Potência de arrasto a 120 km/h (Básico)

Enunciado. Calcule a força e a potência só do arrasto a 120 km/h, e também a resistência total e a potência total na roda no plano.

Conceito. O arrasto cresce com v^2 e a potência de arrasto com v^3. Por isso, acima de cerca de 80 a 100 km/h, cada acréscimo de velocidade custa caro em potência, mesmo com o rolamento quase constante.

Fórmula. $F_a = (1)/(2)\ \rho\ C_d\ A\ ,\ P_a = F_a\ v$

De onde vem. É a mesma fórmula do exercício 1.1. Como $P_a \propto v^3$, ir de 100 para 120 km/h (fator 1,2 na velocidade) multiplica a potência de arrasto por $1{,}2^3 = 1{,}728$.

Resolução

1. **Velocidade.** v = 120 / 3,6 = 33,33 m/s.
2. **Arrasto e sua potência.** $F_a = 0{,}4116 \times (33{,}33)^2 = 0{,}4116 \times 1\,111 = 457{,}3$ N. $P_a = 457{,}3 \times 33{,}33 = 15\,244$ W = 15,24 kW.
3. **Total no plano.** F = 105,9 + 457,3 = 563,3 N. P = 563,3 × 33,33 = 18 776 W = 18,78 kW.

Resposta. F_a = 457,3 N; P_a = 15,24 kW; F = 563,3 N; P = 18,78 kW.

Interpretação. Só o arrasto a 120 km/h (15,24 kW) já supera a potência total a 100 km/h (11,76 kW). O cruzeiro em estrada rápida é, sobretudo, um problema aerodinâmico.

Erro comum a evitar. Somar 20 % à potência de 100 km/h em vez de recalcular: a potência total sobe de 11,76 kW para 18,78 kW, um aumento de 60 %, não de 20 %.

1.11. Comparar resistências a 50 e a 100 km/h (Intermediário)

Enunciado. Calcule rolamento, arrasto, resistência total e potência na roda a 50 km/h e a 100 km/h, no plano. Quantas vezes crescem o arrasto e a potência total?

Conceito. Com o rolamento constante, dobrar a velocidade multiplica o arrasto por quatro e a potência de arrasto por oito. A potência total cresce menos que isso, porque o rolamento não acompanha o v^3.

Fórmula. $F = F_r + (1)/(2)\,\rho\, C_d\, A$, $P = F\, v$

De onde vem. São as mesmas forças do exercício 1.1, avaliadas em dois pontos. A razão de arrasto é $(v2/v1)^2$ e a de potência de arrasto é $(v2/v1)^3$.

Resolução

1. **A 50 km/h.** v = 50 / 3,6 = 13,89 m/s. F_r = 105,9 N. $F_a = 0{,}4116 \times (13{,}89)^2$ = 79,4 N. F = 185,3 N. P = 185,3 × 13,89 = 2 574 W = 2,57 kW.
2. **A 100 km/h.** Do exercício 1.1: F_a = 317,6 N, F = 423,5 N, P = 11,76 kW.
3. **Razões.** O arrasto vai de 79,4 N para 317,6 N, fator 4,00 (como $(2)^2$). A potência total vai de 2,57 kW para 11,76 kW, fator 4,57 — menos que 8, porque o rolamento pesa mais a 50 km/h.

Resposta. A 50 km/h: F = 185,3 N e P = 2,57 kW. A 100 km/h: F = 423,5 N e P = 11,76 kW. Arrasto ×4,00; potência total ×4,57.

Interpretação. A 50 km/h o rolamento ainda é maior que o arrasto (105,9 N contra 79,4 N). A 100 km/h a situação se inverte. O cruzeiro urbano e o de estrada têm físicas diferentes.

Erro comum a evitar. Achar que a potência total também quadruplica, ou que o rolamento dobra com a velocidade neste modelo.

1.12. Rampa de 8 % a 80 km/h (Intermediário)

Enunciado. O up! sobe uma rampa de 8 % a 80 km/h constantes. Calcule F_g, F_r, F_a, a força total e a potência na roda.

Conceito. Com a rampa mais íngreme e a velocidade maior, gravidade e arrasto crescem ao mesmo tempo. A potência de subida é um ponto típico de dimensionamento do powertrain em estrada.

Fórmula. $F = C_r\, m\, g + (1)/(2)\, \rho\, C_d\, A + m\, g\, \operatorname{sen}\theta$

De onde vem. A força total no plano inclinado, em velocidade constante, é a soma das três resistências. sen θ = i / √(1 + i²), com i = 0,08.

Resolução

1. **Velocidade e seno.** v = 80 / 3,6 = 22,22 m/s. sen θ = 0,08 / √(1,0064) = 0,08 / 1,0032 = 0,07975.
2. **Parcelas.** F_g = 900 × 9,81 × 0,07975 = 704,1 N. F_r = 105,9 N. F_a = 0,4116 × (22,22)² = 203,3 N.
3. **Total e potência.** F = 105,9 + 203,3 + 704,1 = 1 013 N. P = 1 013 × 22,22 = 22 517 W = 22,52 kW.

Resposta. F_g = 704,1 N; F_r = 105,9 N; F_a = 203,3 N; F = 1 013 N; P = 22,52 kW.

Interpretação. São quase o dobro da potência de cruzeiro a 100 km/h no plano (11,76 kW). Uma rampa de 8 % a 80 km/h já pede um motor bem mais folgado, ou uma redução de marcha.

Erro comum a evitar. Usar 8° no lugar de 8 %, ou esquecer o arrasto (só com F_g + F_r a potência cairia para 18,0 kW, uma subestimação de 20 %).

1.13. Velocidade máxima com 55 kW no motor (Intermediário)

Enunciado. O motor entrega no máximo 55 kW e o rendimento da transmissão é η = 0,88 (dados de exemplo). No plano, qual é a velocidade máxima do up!, limitada por resistência e não por rotação?

Conceito. A velocidade máxima de resistência é o ponto em que a potência disponível na roda equilibra (F_r + F_a) v. A equação é cúbica em v e se resolve por tentativa, bissecção ou fórmula de Cardano. Aqui usamos bissecção.

Fórmula. $\eta\, P_{mot} = (F_r + (1)/(2)\, \rho\, C_d\, A\,)\, v$

De onde vem. A potência na roda é η P_mot. Igualando a F v, com F = F_r + f_2 v², vem f_2 v³ + F_r v − η P_mot = 0. Não há termo de rampa no plano.

Resolução

1. **Potência na roda.** P_r = 0,88 × 55 000 W = 48 400 W.
2. **Resolver a cúbica.** Testando v: a 45 m/s (162 km/h), F = 105,9 + 0,4116 × 2 025 = 939 N e P = 42,3 kW (sobra potência). A 48 m/s (172,8 km/h), F = 1 055 N e P = 50,6 kW (falta).
3. **Valor que fecha.** v = 47,24 m/s = 170,1 km/h, com F = 1 025 N e P = 48,4 kW.

Resposta. v_máx = 47,24 m/s = 170,1 km/h.

Interpretação. É um teto teórico de resistência, com 55 kW e η = 0,88. Na prática o limitador pode ser a rotação máxima na marcha mais longa, a estabilidade ou a regulamentação, não só esta conta.

Erro comum a evitar. Dividir 55 kW pela força de 100 km/h (423,5 N), o que daria 130 km/h e ignoraria que F_a cresce com v². Também não use 55 kW na roda: a transmissão come 12 %.

1.14. Transferência de carga na aceleração (Intermediário)

Enunciado. O up! acelera em reta com 0,40 g. Calcule a transferência longitudinal e as normais dinâmicas nos eixos dianteiro e traseiro.

Conceito. Na aceleração o momento de inércia descarrega o eixo dianteiro e carrega o traseiro — o sinal contrário ao da frenagem. Em um carro de tração dianteira isso reduz a aderência exatamente no eixo que traciona.

Fórmula. $\Delta F_z = (m\ a\ h)/(L)\ ,\ F_{zd} = F_{zd0} - \Delta F_z\ ,\ F_{zt} = F_{zt0} + \Delta F_z$

De onde vem. A mesma equação de momentos do exercício 1.2, com o sinal da aceleração invertido. F_{zd0} e F_{zt0} são as normais estáticas (4 856 N e 3 973 N).

Resolução

1. **Aceleração e transferência.** $a = 0{,}40 \times 9{,}81 = 3{,}924$ m/s². $\Delta F_z = 900 \times 3{,}924 \times 0{,}50 / 2{,}40 = 736$ N.
2. **Normais dinâmicas.** $F_{zd} = 4\,856 - 736 = 4\,120$ N. $F_{zt} = 3\,973 + 736 = 4\,709$ N. A soma continua 8 829 N.

Resposta. $\Delta F_z = 736$ N; eixo dianteiro 4 120 N; eixo traseiro 4 709 N.

Interpretação. A dianteira, que partiu com 55 % do peso, fica com 47 %. Num FWD a tração máxima cai, e o carro tende a patinar a roda motriz se o torque for alto.

Erro comum a evitar. Repetir o sinal da frenagem (somar à frente). Na aceleração a frente sobe e a traseira agacha.

1.15. Inclinação máxima com tração dianteira (Intermediário)

Enunciado. Qual é a maior rampa que o up! de tração dianteira consegue vencer em regime, limitado só pelo atrito $\mu = 0{,}80$, com transferência de carga? Compare com o cálculo que ignora a transferência. Despreze rolamento e arrasto.

Conceito. Em subida a componente do peso puxa o carro para trás e ainda descarrega o eixo dianteiro. O teto de tração é μ vezes a normal dianteira dinâmica, e essa normal cai com a própria inclinação. Por isso o limite é menor do que μ vezes a parcela estática de 55 %.

Fórmula. $\tan\theta = (\mu\ (\ell_r\ /\ L))/(1 + \mu\ (h\ /\ L))$

De onde vem. No limite, $m\,g \operatorname{sen}\theta = \mu\, F_{zd}$, com $F_{zd} = (m\,g\,/\,L)(\ell_r \cos\theta - h \operatorname{sen}\theta)$. Dividindo por $m\,g\cos\theta$ e rearranjando, vem $\tan\theta = \mu\,(\ell_r/L)\,/\,(1 + \mu\,h/L)$. Sem transferência, $\tan\theta = \mu\,\ell_r/L$.

Resolução

1. **Sem transferência.** $\tan\theta = 0{,}80 \times 0{,}55 = 0{,}440$, ou 44,0 % (23,7°).
2. **Com transferência.** $\tan\theta = (0{,}80 \times 0{,}55)\,/\,(1 + 0{,}80 \times 0{,}50\,/\,2{,}40) = 0{,}440\,/\,(1 + 0{,}1667) = 0{,}440\,/\,1{,}1667 = 0{,}377$, ou 37,7 % (20,7°).

Resposta. Com transferência: 37,7 % (20,7°). Sem transferência: 44,0 % (23,7°).

Interpretação. A transferência reduz cerca de 6 pontos percentuais no limite de rampa. Ainda é um teto de atrito, não de motor: um compacto pode não ter torque para chegar tão longe.

Erro comum a evitar. Usar os 80 % de atrito sobre o peso inteiro ($\mu = 0{,}80 \rightarrow$ 80 % de rampa), como se as quatro rodas tracionassem e não houvesse transferência.

1.16. Curva com superelevação de 8 % (Intermediário)

Enunciado. A curva de raio 40 m do exercício 1.3 ganha superelevação de 8 % (tan θ = 0,08), com μ = 0,80. Qual é a nova velocidade máxima, e quanto ela sobe em relação aos 63,8 km/h do piso plano?

Conceito. A superelevação inclina a pista para o centro da curva. Parte da centrípeta passa a vir da componente do peso, e o atrito trabalha em conjunto com essa geometria. Por isso o limite de velocidade sobe.

Fórmula. `= g (tan θ + μ)/(1 − μ tan θ)`

De onde vem. No referencial da pista, as componentes de N e de μ N na horizontal e na vertical se somam. Dividindo as duas projeções, obtém-se a_y = g (tan θ + μ) / (1 − μ tan θ), no limite em que o atrito aponta para o centro (velocidade alta).

Resolução

1. **Tangente da faixa.** tan θ = 0,08, logo θ = 4,57°. Numerador = 0,08 + 0,80 = 0,88. Denominador = 1 − 0,80 × 0,08 = 0,936.
2. **Aceleração e velocidade.** a_y = 9,81 × 0,88 / 0,936 = 9,223 m/s². v = √(9,223 × 40) = 19,21 m/s = 69,1 km/h.
3. **Comparar com o plano.** No plano eram 63,8 km/h. A superelevação de 8 % acrescenta 5,3 km/h (cerca de 8 %).

Resposta. v_máx = 19,21 m/s = 69,1 km/h (ante 63,8 km/h no plano).

Interpretação. O ganho é modesto com só 8 %, mas real. Em autoestrada a superelevação existe sobretudo para conforto e drenagem, não para permitir uma velocidade muito maior.

Erro comum a evitar. Somar μ g e g tan θ sem o denominador 1 − μ tan θ, ou tratar 8 % como 8°.

1.17. Aceleração 40–80 km/h com potência constante (Intermediário)

Enunciado. Na roda há 30 kW constantes. Incluindo rolamento e arrasto, calcule o tempo e a distância para o up! ir de 40 km/h a 80 km/h, no plano.

Conceito. Com potência constante a força de tração cai com 1/v, e ainda se descontam F_r e F_a(v). A aceleração não é constante: é preciso integrar dt = m dv / F_líq(v).

Fórmula. `a(v) = (P / v − F_r − f_2 v²)/(m) , t = ∫ (m / F(v)) dv`

De onde vem. P = F_x v, logo F_x = P/v. A 2ª lei dá m dv/dt = P/v − F_r − f_2 v². Invertendo, dt = m dv / F_líq, e ds = v dt. A integral foi feita numericamente com passo fino.

Resolução

1. **Extremos.** v1 = 40 / 3,6 = 11,11 m/s e v2 = 22,22 m/s. P = 30 000 W.
2. **Força líquida nos extremos.** A 40 km/h: F_x = 30 000 / 11,11 = 2 700 N, F_res = 105,9 + 50,8 = 156,7 N, F_líq = 2 543 N, a = 2,83 m/s². A 80 km/h: F_x = 1 350 N, F_res = 309,2 N, F_líq = 1 041 N, a = 1,16 m/s².
3. **Integração.** Integrando a(v) entre 11,11 e 22,22 m/s: t = 6,47 s e s = 113 m.

Resposta. t = 6,47 s; s = 113 m.

Interpretação. A aceleração cai à metade ao longo do trecho, porque a força de tração cai com 1/v e o arrasto sobe. Um cálculo com aceleração média simples não descreveria bem o fim da retomada.

Erro comum a evitar. Usar a = P/(m v) com um só v e acelerarção constante, ou esquecer as resistências (isso encurtaria o tempo para cerca de 5,0 s).

1.18. Vento de frente de 10 m/s a 100 km/h (Intermediário)

Enunciado. O up! cruza no plano a 100 km/h com vento de frente de 10 m/s. Calcule o novo arrasto, a potência na roda e o acréscimo em relação ao exercício 1.1 (ar parado).

Conceito. O arrasto depende da velocidade relativa do ar, não da velocidade em relação ao solo. Já a potência na roda é força vezes a velocidade em relação ao solo, porque é contra o piso que a roda trabalha.

Fórmula. `F_a = (1)/(2) ρ C_d A , P = (F_r + F_a) v_solo`

De onde vem. v_ar = v_solo + v_vento, com vento de frente. O rolamento continua ligado a v_solo (e ao peso). A potência mecânica é F · v_solo.

Resolução

1. **Duas velocidades.** v_solo = 100 / 3,6 = 27,78 m/s. v_ar = 27,78 + 10 = 37,78 m/s.
2. **Forças.** F_a = 0,4116 × (37,78)² = 587,4 N (ante 317,6 N, um acréscimo de 269,8 N). F = 105,9 + 587,4 = 693,3 N.
3. **Potência.** P = 693,3 × 27,78 = 19 260 W = 19,26 kW. O acréscimo é 19,26 − 11,76 = 7,50 kW.

Resposta. F_a = 587,4 N; F = 693,3 N; P = 19,26 kW (é 7,50 kW a mais que no ar parado).

Interpretação. Um vento de frente de 36 km/h aumenta a potência de cruzeiro em 64 %. É um efeito enorme, e explica por que o consumo real em estrada varia tanto de um dia para o outro.

Erro comum a evitar. Usar v_ar também no P = F v (isso inflaria a potência para 26,2 kW) ou somar 10 km/h em vez de 10 m/s.

1.19. Raio mínimo em piso molhado a 80 km/h (Intermediário)

Enunciado. Em piso molhado, μ = 0,40. Qual é o menor raio de curva plana que o up! aguenta a 80 km/h, no modelo de atrito do exercício 1.3?

Conceito. É o inverso do problema da velocidade máxima: agora v está fixo e o raio mínimo vem de $R = v^2 / (\mu g)$. Piso molhado corta o atrito pela metade e exige um raio bem maior, ou uma velocidade menor.

Fórmula. `R_mín =`

De onde vem. De $m v^2 / R = \mu m g$ vem $R = v^2 / (\mu g)$. O m se cancela outra vez: o limite de deslizamento, neste modelo, não depende da massa.

Resolução

1. **Velocidade.** v = 80 / 3,6 = 22,22 m/s.
2. **Raio mínimo.** $R = (22{,}22)^2 / (0{,}40 \times 9{,}81) = 493{,}8 / 3{,}924 = 62{,}9$ m.

Resposta. R_mín = 62,9 m.

Interpretação. No seco (μ = 0,80) o mesmo cálculo daria 31,5 m. Com o piso molhado o raio mínimo dobra, porque R é inversamente proporcional a μ.

Erro comum a evitar. Usar μ = 0,80 por hábito, ou esquecer a conversão de 80 km/h. Também não use $R = \mu g / v^2$, que é o inverso da fórmula.

1.20. Um quilômetro de rampa com 20 kW na roda (Intermediário)

Enunciado. O up! sobe 1,00 km de rampa de 5 % com 20 kW constantes na roda, em regime (velocidade constante). Qual é essa velocidade e quanto tempo leva o trecho?

Conceito. Em regime a potência na roda equilibra (F_r + F_a + F_g) v. De novo há uma cúbica em v. Com v conhecido, o tempo é só distância sobre velocidade.

Fórmula. `P = (F_r + f_2 + m g sen θ) v`

De onde vem. É o balanço de potência do exercício 1.6, resolvido para v com P conhecido. sen θ = 0,04994, como em 1.6. F_g = 440,9 N.

Resolução

1. **Fechar o balanço.** P = 20 000 W. Por bissecção, v = 24,92 m/s = 89,7 km/h, com F = 802,5 N (105,9 + 255,6 + 440,9).
2. **Tempo no quilômetro.** t = 1 000 m / 24,92 m/s = 40,1 s.

Resposta. v = 24,92 m/s = 89,7 km/h; t = 40,1 s.

Interpretação. Com 20 kW na roda o compacto ainda sobe a 5 % perto de 90 km/h. A 11,76 kW do cruzeiro de 100 km/h no plano, essa rampa forçaria uma velocidade bem menor.

Erro comum a evitar. Dividir 20 kW só por F_g (440,9 N), obtendo 45 m/s: isso ignora rolamento e arrasto e superestima a velocidade.

1.21. Velocidade máxima numa rampa de 5 % (Desafio)

Enunciado. Com os 55 kW do motor e η = 0,88 na transmissão, qual é a velocidade máxima do up! numa rampa de 5 %? Compare com os 170,1 km/h do plano (exercício 1.13).

Conceito. A rampa adiciona F_g ao balanço de potência e baixa o ponto de equilíbrio. A equação continua cúbica, agora com termo constante de gravidade maior.

Fórmula. $\eta\ P_{mot} = (F_r + F_g + f_2)\ v$

De onde vem. P_r = 48 400 W, como em 1.13. F_g = 440,9 N, como em 1.6. Resolve-se $f_2\ v^3 + (F_r + F_g)\ v - P_r = 0$.

Resolução

1. **Dados já conhecidos.** P_r = 0,88 × 55 000 = 48 400 W. F_r + F_g = 105,9 + 440,9 = 546,8 N. f_2 = 0,4116 N/(m/s)².
2. **Solução.** v = 40,07 m/s = 144,3 km/h, com F = 1 208 N e P = 48,4 kW.
3. **Comparar.** No plano eram 170,1 km/h. A rampa de 5 % tira 25,8 km/h do teto de resistência.

Resposta. v_máx = 40,07 m/s = 144,3 km/h (ante 170,1 km/h no plano).

Interpretação. Uma ladeira aparentemente suave reduz bastante a velocidade máxima, porque a potência que sobra para o arrasto diminui e o arrasto é proporcional a v².

Erro comum a evitar. Reaproveitar os 170 km/h do plano, ou descontar 5 % da velocidade (isso daria 161,6 km/h, ainda otimista demais).

1.22. Transferência lateral em curva (Desafio)

Enunciado. O up! faz uma curva com a_y = 0,50 g. A bitola de exemplo é t = 1,42 m. Calcule a transferência lateral total e as normais do lado interno e do lado externo, desprezando a rolagem da carroceria.

Conceito. A aceleração lateral, aplicada na altura do CG, transfere carga do lado interno para o externo. Sem o efeito da barra estabilizadora e da rolagem, a conta é o análogo transversal de ΔF_z = m a h / L, trocando L pela bitola t.

Fórmula. $\Delta F_z = (m\ a_y\ h)/(t)$

De onde vem. O momento m a_y h é equilibrado pelo par de variações de normal na bitola: ΔF_z × t = m a_y h. Estático, cada lado carrega m g / 2.

Resolução

1. **Aceleração e transferência.** a_y = 0,50 × 9,81 = 4,905 m/s². ΔF_z = 900 × 4,905 × 0,50 / 1,42 = 1 554 N.
2. **Normais por lado.** Estático: 8 829 / 2 = 4 415 N. Interno: 4 415 − 1 554 = 2 860 N. Externo: 4 415 + 1 554 = 5 969 N.

Resposta. ΔF_z = 1 554 N; lado interno 2 860 N; lado externo 5 969 N.

Interpretação. O lado externo chega a carregar cerca de 68 % do peso. Os pneus de fora trabalham muito mais, e o limite de aderência do carro deixa de ser simétrico.

Erro comum a evitar. Usar o entre-eixos L no lugar da bitola t, ou repartir 55/45 entre esquerda e direita (essa repartição é longitudinal, entre eixos).

1.23. Tombamento ou deslizamento? (Desafio)

Enunciado. Com t = 1,42 m, h = 0,50 m e μ = 0,80, o up! atinge primeiro o limite de deslizamento ou o de tombamento, em curva plana? Calcule as duas acelerações-limite, em g.

Conceito. O deslizamento ocorre quando a demanda lateral atinge μ g. O tombamento ocorre quando a normal interna cai a zero, ou seja, quando todo o peso passou para o lado de fora. Carros de passeio baixos e largos deslizam muito antes de tombar; o contrário pode acontecer em SUVs altos ou em veículos estreitos.

Fórmula. $(a_{y,desl})/(g) = \mu$, $(a_{y,tomb})/(g) = (t)/(2\ h)$

De onde vem. Deslizamento: a_y = μ g, do exercício 1.3. Tombamento: a normal interna é m g/2 − m a_y h / t = 0, logo a_y / g = t / (2 h). Vale no modelo rígido, sem rolagem.

Resolução

1. **Deslizamento.** a_y / g = μ = 0,80 g.
2. **Tombamento.** a_y / g = 1,42 / (2 × 0,50) = 1,42 / 1,00 = 1,42 g.
3. **Comparar.** 0,80 g < 1,42 g: o carro desliza bem antes de tombar. A margem de tombamento é 1,42 / 0,80 = 1,78 vezes o limite de atrito.

Resposta. Desliza a 0,80 g e tombaria a 1,42 g. O deslizamento ocorre primeiro.

Interpretação. Para este hatch baixo, o piso 'avisa' (as rodas derrapam) muito antes de o carro apoiar só nas rodas de fora. Se h subisse para 0,90 m, o tombamento cairia para 0,79 g e passaria a ser competitivo com o atrito.

Erro comum a evitar. Usar t/h sem o 2, ou comparar forças em newton com acelerações em g sem normalizar.

1.24. Aceleração residual numa rampa de 5 % (Desafio)

Enunciado. A 60 km/h, numa rampa de 5 %, a força de tração na roda é 1 500 N (dado de exemplo). Qual é a aceleração do up!? Ele ainda acelera, ou já desacelera?

Conceito. A aceleração instantânea é a força líquida dividida pela massa. A força líquida é a tração menos rolamento, arrasto e componente de rampa. O sinal diz se o carro ainda ganha velocidade naquela condição.

Fórmula. $a = (F_x - F_r - F_a - F_g)/(m)$

De onde vem. É a 2ª lei na direção da pista. F_r, F_a e F_g a 60 km/h na rampa de 5 % já foram calculados no exercício 1.6 e somam 661,2 N.

Resolução

1. **Resistências conhecidas.** Do exercício 1.6, a 16,67 m/s: F_r + F_a + F_g = 105,9 + 114,3 + 440,9 = 661,2 N.
2. **Força líquida e aceleração.** F_líq = 1 500 − 661,2 = 838,8 N. a = 838,8 / 900 = 0,932 m/s² (ainda acelera).

Resposta. a = 0,932 m/s². Ainda acelera.

Interpretação. Com 1 500 N na roda sobra quase 840 N, uma aceleração modesta (0,095 g), mas positiva. Se a tração caísse abaixo de 661 N, o carro começaria a perder velocidade na subida.

Erro comum a evitar. Dividir 1 500 N pela massa e esquecer as resistências (isso daria 1,67 m/s², quase o dobro do valor real).

1.25. Massa extra de 130 kg a 100 km/h (Desafio)

Enunciado. Uma conversão elétrica acrescenta 130 kg à ordem de marcha (dado de exemplo). Recalcule rolamento, resistência total e potência a 100 km/h no plano, e compare com o exercício 1.1.

Conceito. A massa extra aumenta o rolamento (proporcional ao peso) e a energia para acelerar, mas não o arrasto, que depende da forma e da velocidade. Em cruzeiro constante de estrada o efeito é pequeno; em cidade, na aceleração, ele pesa mais.

Fórmula. `F_r' = C_r (m + Δm) g , P' = (F_r' + F_a) v`

De onde vem. Só F_r muda, porque N' = (m + Δm) g. F_a permanece 317,6 N se C_d e A não mudarem. A potência de cruzeiro sobe só com o ΔF_r × v.

Resolução

1. **Novo rolamento.** m' = 1 030 kg. F_r' = 0,012 × 1 030 × 9,81 = 121,3 N (é 15,3 N a mais).
2. **Total e potência.** F' = 121,3 + 317,6 = 438,8 N. P' = 438,8 × 27,78 = 12 190 W = 12,19 kW.
3. **Diferença.** O acréscimo é 12,19 − 11,76 = 0,43 kW, ou 3,6 % da potência de cruzeiro.

Resposta. F_r' = 121,3 N; F' = 438,8 N; P' = 12,19 kW (é 0,43 kW a mais que em 1.1).

Interpretação. Em cruzeiro a 100 km/h, 130 kg a mais custam pouco mais de 0,4 kW. O preço verdadeiro da massa extra aparece na aceleração, na subida e na energia para cada parada e partida.

Erro comum a evitar. Reescalar também o arrasto com a massa, ou aplicar os 130 kg como 130/900 = 14 % sobre a potência total (o aumento real é 3,6 %, não 14 %).

1.26. Desaceleração em rolagem livre a 100 km/h (Desafio)

Enunciado. O up! entra em rolagem livre (ponto morto, tração nula) a 100 km/h, no plano e sem vento. Qual é a desaceleração instantânea? Em quanto tempo a velocidade cai de 100 para 90 km/h, se você aproximar a força como constante nesse intervalo?

Conceito. No coast-down a única força horizontal é a resistência. A desaceleração instantânea é F/m. Entre 100 e 90 km/h o arrasto varia pouco, e uma força constante no ponto de 100 km/h já dá uma primeira estimativa do tempo — um pouco pessimista, porque F_a cai conforme o carro reduz.

Fórmula. `a = (F_r + F_a)/(m) , t ≈ (Δv)/(a)`

De onde vem. Com F_x = 0, a 2ª lei dá a = F_res / m. A aproximação t = Δv / a vale se a for tomada como constante. O ensaio de coast-down real mede exatamente esses tempos para ajustar os coeficientes de road load.

Resolução

1. **Desaceleração a 100 km/h.** F = 423,5 N (exercício 1.1). a = 423,5 / 900 = 0,471 m/s², ou 0,048 g.
2. **Intervalo de 10 km/h.** Δv = 10 / 3,6 = 2,778 m/s. t ≈ 2,778 / 0,471 = 5,90 s.

Resposta. a = 0,471 m/s² (0,048 g) a 100 km/h; t ≈ 5,90 s de 100 para 90 km/h, na aproximação de força constante.

Interpretação. Uma desaceleração de 0,05 g é suave: o carro perde 10 km/h em cerca de 6 s. No ensaio real o tempo seria um pouco maior, porque o arrasto médio entre 100 e 90 km/h é menor que o de 100 km/h.

Erro comum a evitar. Usar só o rolamento (tempo de 23 s, muito longo) ou tratar 10 km/h como 10 m/s.

1.27. Energia em 10 km, metade em rampa (Desafio)

Enunciado. O up! percorre 10 km a 100 km/h constantes: 5 km no plano e 5 km de rampa de 5 %. Qual é a energia na roda em cada trecho e o total, em kWh?

Conceito. Em velocidade constante a potência é constante, e a energia é P vezes o tempo, ou força vezes distância. Na rampa entra também o trabalho de elevar o peso, que fica armazenado como energia potencial.

Fórmula. `E = P t = F s`

De onde vem. t = s / v é igual nos dois trechos, porque v e s são iguais. P_plano veio do exercício 1.1. P_rampa = (F_r + F_a + F_g) v, com F_g do exercício 1.6. A conversão é 1 kWh = 3,6 × 10^6 J.

Resolução

1. **Tempo de cada trecho.** v = 27,78 m/s. t = 5 000 / 27,78 = 180 s = 0,0500 h em cada metade.
2. **Potências.** P_plano = 11,76 kW. P_rampa = (423,5 + 440,9) × 27,78 = 24 012 W = 24,01 kW.
3. **Energias.** E_plano = 11,76 kW × 0,0500 h = 0,588 kWh. E_rampa = 24,01 × 0,0500 = 1,201 kWh. Total = 1,79 kWh. A parcela potencial é m g × (5 000 × sen θ) = 440,9 × 5 000 = 2,20 × 10^6 J = 0,612 kWh.

Resposta. E_plano = 0,588 kWh; E_rampa = 1,201 kWh; total = 1,79 kWh. Desses, 0,612 kWh ficam como energia potencial.

Interpretação. A metade em rampa consome o dobro da metade plana. Na descida, parte dos 0,612 kWh poderia voltar (freio motor ou recuperação); o resto vira calor.

Erro comum a evitar. Somar 5 % à energia plana (0,618 kWh) em vez de recalcular a força. A rampa não é um acréscimo de 5 % na energia, e sim uma parcela da ordem do próprio cruzeiro.

1.28. Cruzeiro a 100 km/h com reboque (Desafio)

Enunciado. O up! reboca um carretinha de 400 kg com $C_r = 0{,}012$ e área equivalente de arrasto $C_d A = 0{,}40\ m^2$ (dados de exemplo). Calcule a potência na roda a 100 km/h no plano e compare com os 11,76 kW do exercício 1.1.

Conceito. O reboque soma o próprio rolamento e o próprio arrasto. O carro ainda vence as resistências dele. A potência de cruzeiro pode subir bastante, mesmo com um reboque pequeno, porque a área extra de arrasto pesa a 100 km/h.

Fórmula. `F = F_r,c + F_r,t + F_a,c + F_a,t`

De onde vem. Cada massa tem o seu $C_r\, m\, g$, e cada forma o seu $(1/2)\, \rho\, (C_d A)\, v^2$. As forças se somam no gancho e vão para as rodas motrizes.

Resolução

1. **Parcelas do reboque.** $F_{r,t} = 0{,}012 \times 400 \times 9{,}81 = 47{,}1$ N. $F_{a,t} = 0{,}5 \times 1{,}225 \times 0{,}40 \times (27{,}78)^2 = 0{,}245 \times 771{,}7 = 189{,}0$ N.
2. **Total e potência.** $F = 423{,}5 + 47{,}1 + 189{,}0 = 659{,}7$ N. $P = 659{,}7 \times 27{,}78 = 18\,324$ W $= 18{,}32$ kW.
3. **Acréscimo.** $18{,}32 - 11{,}76 = 6{,}56$ kW, um aumento de 56 %.

Resposta. $P = 18{,}32$ kW, isto é, 6,56 kW a mais que os 11,76 kW sem reboque.

Interpretação. O arrasto do reboque (189 N) vale mais que o próprio rolamento dele (47 N) e quase o rolamento do carro. A 100 km/h, forma e área do carretinha importam mais do que os 400 kg.

Erro comum a evitar. Acrescentar só os 400 kg no rolamento e esquecer o $C_d A$ do reboque, o que deixaria de fora 5,25 kW — a maior parte do acréscimo.

1.29. Frenagem e curva no círculo de atrito (Desafio)

Enunciado. O up! está em curva com $a_y = 0{,}50\ g$ e $\mu = 0{,}80$. Qual é a maior desaceleração longitudinal ainda disponível, no modelo do círculo de atrito? Que fração do limite em reta é isso?

Conceito. O pneu tem um teto de força resultante, não duas reservas independentes. Se parte do atrito já está comprometida na curva, sobra menos para frear ou acelerar. O lugar geométrico é o círculo (ou elipse) de Kamm: $a_x^2 + a_y^2 \le (\mu g)^2$.

Fórmula. $a_x = \sqrt{(\mu g)^2 - a_y^2}$

De onde vem. A força de atrito máxima é $\mu m g$. Decompondo em longitudinal e lateral, $(m a_x)^2 + (m a_y)^2 \le (\mu m g)^2$. O m se cancela e resta o círculo de raio μg no plano a_x–a_y.

Resolução

1. **Limite em reta.** $a_{máx} = 0{,}80 \times 9{,}81 = 7{,}848\ m/s^2$.
2. **Parcela já usada na curva.** $a_y = 0{,}50 \times 9{,}81 = 4{,}905\ m/s^2$.
3. **O que sobra para frear.** $a_x = \sqrt{7{,}848^2 - 4{,}905^2} = \sqrt{61{,}59 - 24{,}06} = \sqrt{37{,}53} = 6{,}13\ m/s^2 = 0{,}624\ g$. Fração do limite em reta: $6{,}13 / 7{,}85 = 0{,}78$, ou 78 %.

Resposta. a_x máx $= 6{,}13\ m/s^2 = 0{,}624\ g$, isto é, 78 % do limite em reta.

Interpretação. Em uma curva a 0,50 g ainda dá para frear com mais de 0,6 g, mas não com os 0,80 g da reta. Se você pedir os dois no máximo, o pneu satura e desliza.

Erro comum a evitar. Subtrair 0,50 g de 0,80 g (sobraria 0,30 g). A combinação é pitagórica, não linear: 0,50 g usa só cerca de 22 % da capacidade de frenagem, não metade.

1.30. Velocidade em que rolamento e arrasto se igualam (Desafio)

Enunciado. Em que velocidade, no plano, a resistência de rolamento do up! se iguala à força aerodinâmica? Qual é a potência na roda nesse ponto?

Conceito. Há uma velocidade característica em que as duas parcelas do plano empata. Abaixo dela o rolamento domina o cruzeiro; acima, o arrasto. Encontrá-la é uma forma simples de ler o aerodinâmico do veículo.

Fórmula. $C_r\, m\, g = \frac{1}{2} \rho\, C_d\, A \Rightarrow v = \sqrt{F_r / f_2}$

De onde vem. Igualando $F_r = f_2 v^2$ e isolando v, vem $v = \sqrt{F_r / f_2}$. A força total é $2 F_r$, e $P = 2 F_r v$.

Resolução

1. **Velocidade de empate.** $v = \sqrt{105{,}9 / 0{,}4116} = \sqrt{257{,}3} = 16{,}04\ m/s = 57{,}8\ km/h$.
2. **Força e potência.** Cada parcela vale 105,9 N, logo $F = 211{,}9$ N. $P = 211{,}9 \times 16{,}04 = 3\,400\ W = 3{,}40\ kW$.

Resposta. $v = 16{,}04\ m/s = 57{,}8\ km/h$; $F = 211{,}9$ N; $P = 3{,}40$ kW.

Interpretação. Por volta de 58 km/h as duas resistências se equivalem. Isso casa com o exercício 1.11: a 50 km/h o rolamento ainda ganha; a 100 km/h o arrasto já é o triplo.

Erro comum a evitar. Igualar potências de rolamento e de arrasto de outro jeito (elas se igualam no mesmo ponto, porque as duas forças são multiplicadas pela mesma v) ou esquecer a raiz.

Gestão de Projetos de Inovação Tecnológica (12 h)

2.1. Valor agregado: CPI e SPI (Básico)

Enunciado. Um projeto de bancada de teste de recarga tem valor planejado PV = R$ 80.000, valor agregado EV = R$ 70.000 e custo real AC = R$ 90.000 (dados de exemplo). Calcule CV, SV, CPI e SPI e diga como o projeto está.

Conceito. O valor agregado compara o trabalho entregue (EV) com o que foi gasto (AC) e com o que deveria ter sido entregue até agora (PV). Índices menores que 1 indicam desvio: o projeto está mais caro ou mais atrasado do que o plano.

Fórmula. $CV = EV - AC$, $SV = EV - PV$, $CPI = (EV)/(AC)$, $SPI = (EV)/(PV)$

De onde vem. CV e SV são diferenças em reais. CPI e SPI são as mesmas comparações em forma de razão, o que permite acompanhar o projeto ao longo do tempo independentemente do tamanho do orçamento.

Resolução

1. **Variações em reais.** CV = 70.000 − 90.000 = −R$ 20.000. SV = 70.000 − 80.000 = −R$ 10.000.
2. **Índices.** CPI = 70.000 / 90.000 = 0,778. SPI = 70.000 / 80.000 = 0,875.
3. **Leitura.** Os dois índices são menores que 1: o projeto gasta mais do que o trabalho entregue e anda atrasado em relação ao plano.

Resposta. CV = −R$ 20.000; SV = −R$ 10.000; CPI = 0,778; SPI = 0,875. O projeto está acima do orçamento e atrasado.

Interpretação. O time já gastou R$ 20.000 a mais do que o valor do trabalho entregue e está R$ 10.000 atrasado no plano. Os dois desvios pedem ação, não só um relatório.

Erro comum a evitar. Inverter EV e AC no CPI (90/70 = 1,29, que pintaria um projeto saudável). O numerador é sempre o valor agregado EV.

2.2. Payback e valor presente líquido (Básico)

Enunciado. Uma esteira de diagnóstico de alta tensão custa R$ 120.000 e rende uma economia de R$ 40.000 por ano, durante 4 anos. A taxa de desconto é 10 % ao ano (dados de exemplo). Calcule o payback simples e o VPL.

Conceito. O payback simples diz em quanto tempo o investimento se paga, ignorando o valor do dinheiro no tempo. O VPL traz todos os fluxos à data de hoje à taxa de desconto e mostra se o projeto cria valor nessa taxa.

Fórmula. `payback = (I)/(CF) , VPL = −I + CF × (1 − (1 + i)^(−n))/(i)`

De onde vem. O fator [1 − (1+i)^(−n)] / i é a anuidade uniforme antecipada ao valor presente: a soma de 1/(1+i) + … + 1/(1+i)^n. Multiplicando pelo fluxo anual e descontando o investimento, obtém-se o VPL.

Resolução

1. **Payback simples.** 120.000 / 40.000 = 3,0 anos.
2. **Fator de anuidade.** (1,10)^4 = 1,4641, logo (1,10)^(−4) = 0,6830. Fator = (1 − 0,6830) / 0,10 = 3,1699.
3. **VPL.** VPL = −120.000 + 40.000 × 3,1699 = −120.000 + 126.795 = R$ 6.795.

Resposta. Payback = 3,0 anos; VPL = R$ 6.795. O investimento se paga e cria valor à taxa de 10 %.

Interpretação. Os dois indicadores apontam na mesma direção, mas o VPL é apertado: no gráfico, uma taxa um pouco maior já vira o sinal. O payback sozinho não mostraria isso.

Erro comum a evitar. Somar os R$ 40.000 quatro vezes e descontar o investimento sem trazer a valor presente (isso daria +R$ 40.000, quase seis vezes o VPL verdadeiro).

2.3. Valor monetário esperado de um risco (Básico)

Enunciado. Há 30 % de chance de um atraso de ferramenta custar R$ 80.000. Uma ação de mitigação custa R$ 8.000 e reduz a probabilidade para 5 %, com o mesmo impacto (dados de exemplo). Vale a pena mitigar?

Conceito. O valor monetário esperado (EMV) de um risco é a probabilidade vezes o impacto. Compara-se o custo esperado sem mitigação com o custo da ação mais o risco residual. A conta não elimina o risco; ela diz se, em média, a ação se paga.

Fórmula. `EMV = p × impacto`

De onde vem. A esperança matemática de uma variável que vale o impacto com probabilidade p e zero no caso contrário é p vezes o impacto. Com a mitigação, soma-se o custo certo da ação ao EMV residual.

Resolução

1. **Sem mitigação.** EMV_0 = 0,30 × 80.000 = R$ 24.000.
2. **Com mitigação.** EMV residual = 0,05 × 80.000 = R$ 4.000. Custo total esperado = 8.000 + 4.000 = R$ 12.000.
3. **Comparar.** 12.000 < 24.000: a mitigação reduz o custo esperado em R$ 12.000 e vale a pena neste cenário.

Resposta. Sim. O custo esperado cai de R$ 24.000 para R$ 12.000; a mitigação vale a pena neste cenário.

Interpretação. A ação se paga em média, mas o pior caso ainda pode ocorrer (os 5 % residual). EMV ajuda a decidir; não substitui um plano de contingência para o caso em que o risco se materializa.

Erro comum a evitar. Comparar só o custo da mitigação (R$ 8.000) com o impacto cheio (R$ 80.000), sem multiplicar pelas probabilidades. Isso faria qualquer mitigação barata parecer obrigatória.

2.4. Retorno sobre o investimento (Básico)

Enunciado. Com o mesmo investimento do exercício 2.2 (R$ 120.000 e economia de R$ 40.000 por ano durante 4 anos), calcule o lucro total, o ROI no período e o ROI médio anual simples.

Conceito. O ROI relaciona o lucro obtido com o capital investido. Na forma simples, é (ganho total − investimento) / investimento. Ele não desconta o tempo, ao contrário do VPL, mas é um indicador imediato de rentabilidade.

Fórmula. $ROI = (n \times CF - I)/(I)$

De onde vem. O ganho total em 4 anos é 4 × 40.000. Subtraindo o investimento, sobra o lucro. Dividindo pelo investimento, obtém-se o ROI do período. O ROI médio anual simples é esse lucro dividido por 4 e depois por I.

Resolução

1. **Ganho e lucro.** Ganho = 4 × 40.000 = R$ 160.000. Lucro = 160.000 − 120.000 = R$ 40.000.
2. **ROI do período.** ROI = 40.000 / 120.000 = 0,333, ou 33,3 % em 4 anos.
3. **ROI médio anual.** (40.000 / 4) / 120.000 = 10.000 / 120.000 = 8,33 % ao ano (simples, sem juros compostos).

Resposta. Lucro = R$ 40.000; ROI = 33,3 % em 4 anos; ROI médio anual simples = 8,33 % a.a.

Interpretação. Um ROI de 33 % em 4 anos parece confortável, mas o VPL do exercício 2.2 era só R$ 6.795 à taxa de 10 %. Os dois números convivem: o ROI ignora que o dinheiro devolve-se ao longo do tempo.

Erro comum a evitar. Calcular ROI = 160.000 / 120.000 = 133 % e chamar isso de lucro. Esse é o índice de receita sobre o capital, não o ROI do lucro.

2.5. Folga de uma atividade (Básico)

Enunciado. A atividade D dura 5 dias úteis, pode começar no início do dia 8 (início mais cedo ES = 8) e precisa terminar no fim do dia 16 (término mais tarde LF = 16), dados de exemplo. Calcule EF, LS e a folga total.

Conceito. Em um cronograma em rede, cada atividade tem um intervalo em que pode acontecer sem atrasar o projeto. A folga total é a folga desse intervalo. Folga zero significa atividade no caminho crítico.

Fórmula. $EF = ES + d\ ,\ LS = LF - d\ ,\ folga = LF - EF = LS - ES$

De onde vem. O término mais cedo é o início mais cedo mais a duração. O início mais tarde é o término mais tarde menos a duração. As duas diferenças dão a mesma folga, o que serve de conferência.

Resolução

1. **Término mais cedo e início mais tarde.** EF = 8 + 5 = 13. LS = 16 − 5 = 11.
2. **Folga.** Folga = 16 − 13 = 3 dias. Conferência: 11 − 8 = 3 dias.

Resposta. EF = 13; LS = 11; folga = 3 dias.

Interpretação. D pode atrasar até 3 dias sem comprometer o LF. Se a duração subir para 8 dias, a folga zera e D entra no caminho crítico.

Erro comum a evitar. Calcular folga = LF − ES (16 − 8 = 8), esquecendo de tirar a duração. A folga é o que sobra depois de caber a atividade no intervalo.

2.6. Custo total de um pacote de trabalho (Básico)

Enunciado. Um pacote de calibração tem custo direto de R$ 50.000 e rateio de custo indireto de R$ 15.000 (dados de exemplo). Qual é o custo total? Se o time quer uma margem de 12 % sobre o total, qual é o preço de venda interno?

Conceito. O custo direto vai no pacote (mão de obra, material, serviços). O indireto é rateio de estrutura (lab, gestão, instalações). O preço com margem parte do custo total, não só do direto.

Fórmula. $C = C_{dir} + C_{ind}$, $P = C \times (1 + m)$

De onde vem. A margem m sobre o custo significa que o preço é o custo mais m vezes o custo, ou seja, C (1 + m). Se a margem fosse sobre o preço, a fórmula seria outra (C / (1 − m)).

Resolução

1. **Custo total.** C = 50.000 + 15.000 = R$ 65.000.
2. **Preço com margem.** P = 65.000 × 1,12 = R$ 72.800.

Resposta. Custo total = R$ 65.000; preço interno com 12 % = R$ 72.800.

Interpretação. Os R$ 7.800 de margem precisam caber depois de todos os custos, inclusive o rateio. Esquecer o indireto deixaria a margem aparente maior do que a real.

Erro comum a evitar. Aplicar os 12 % só sobre os R$ 50.000 diretos (preço de R$ 71.000, R$ 1.800 a menos) ou tratar 12 % como margem sobre o preço, usando 65.000 / 0,88.

2.7. Valor agregado a partir do percentual concluído (Básico)

Enunciado. O orçamento no término (BAC) de um pacote é R$ 200.000. O pacote está 40 % concluído, medido por entregas, e já gastou AC = R$ 90.000 (dados de exemplo). Calcule EV e CPI.

Conceito. Quando o percentual concluído é confiável, o valor agregado é esse percentual vezes o BAC. Comparar EV com o custo real dá o CPI do pacote, mesmo antes do fim do trabalho.

Fórmula. $EV = (\%\ \text{concluído}) \times BAC$, $CPI = (EV)/(AC)$

De onde vem. O BAC é o valor planejado de 100 % do pacote. Se 40 % do escopo está pronto, 40 % do BAC é o trabalho ‘ganho’. A definição de CPI continua EV / AC.

Resolução

1. **Valor agregado.** EV = 0,40 × 200.000 = R$ 80.000.
2. **CPI.** CPI = 80.000 / 90.000 = 0,889.

Resposta. EV = R$ 80.000; CPI = 0,889.

Interpretação. O pacote já gastou R$ 90.000 para entregar R$ 80.000 de valor: está um pouco acima do orçamento, mas melhor que o CPI de 0,778 do exercício 2.1 no projeto inteiro.

Erro comum a evitar. Usar o AC como se fosse EV (CPI = 1 por construção) ou aplicar 40 % sobre o AC em vez de sobre o BAC.

2.8. Ler CPI = 1,10 e SPI = 0,90 (Básico)

Enunciado. Um projeto com BAC = R$ 200.000 apresenta CPI = 1,10 e SPI = 0,90 (dados de exemplo). O projeto está melhor ou pior em custo e em prazo? Qual seria a estimativa no término (EAC = BAC / CPI) se o CPI se mantiver?

Conceito. CPI maior que 1 significa que cada real gasto entrega mais de um real de valor. SPI menor que 1 significa atraso. Os dois podem coexistir: o time está eficiente, porém atrasado — por exemplo, com menos gente do que o plano pedia.

Fórmula. `EAC = (BAC)/(CPI)`

De onde vem. Se o desempenho de custo atual se repetir até o fim, o custo total será o orçamento dividido pelo CPI. É a estimativa mais usada quando não há motivo para achar que o CPI vai mudar.

Resolução

1. **Ler os índices.** CPI = 1,10 > 1: abaixo do orçamento (boa eficiência de custo). SPI = 0,90 < 1: atrasado em cerca de 10 % do plano.
2. **EAC.** EAC = 200.000 / 1,10 = R$ 181.818.

Resposta. Custo abaixo do orçamento e prazo atrasado. EAC = R$ 181.818 se o CPI se mantiver.

Interpretação. Economia prevista de cerca de R$ 18.000 no término, mas o atraso pode acabar comendo essa folga se o time acelerar com hora extra. Custo e prazo precisam ser lidos juntos.

Erro comum a evitar. Tratar CPI e SPI como percentuais de ‘quanto falta’ ou achar que SPI = 0,90 significa 90 % de atraso (o atraso é de 10 % do plano, não de 90 %).

2.9. Juros simples e compostos (Básico)

Enunciado. R$ 20.000 são aplicados por 3 anos à taxa de 10 % ao ano (dados de exemplo). Qual é o valor futuro a juros simples e a juros compostos? Qual é a diferença?

Conceito. No juro simples, a taxa incide só sobre o capital inicial, todos os anos. No composto, incide também sobre os juros já incorporados. Em gestão de projetos, o desconto do VPL é sempre composto.

Fórmula. `VF_s = C (1 + i n) , VF_c = C`

De onde vem. Juros simples: o juro de cada período é i C, constante, logo VF = C + n i C. Juros compostos: cada período multiplica o saldo por (1 + i), o que dá a potência (1 + i)^n.

Resolução

1. **Juros simples.** VF_s = 20.000 × (1 + 0,10 × 3) = 20.000 × 1,30 = R$ 26.000.
2. **Juros compostos.** VF_c = 20.000 × (1,10)^3 = 20.000 × 1,331 = R$ 26.620.
3. **Diferença.** 26.620 − 26.000 = R$ 620, ou 2,4 % a mais no composto.

Resposta. Juros simples: R$ 26.000. Compostos: R$ 26.620. Diferença = R$ 620.

Interpretação. Em 3 anos a diferença ainda é pequena. No gráfico, ela cresce depressa depois do quinto ano: por isso o prazo longo pede sempre o regime composto.

Erro comum a evitar. Calcular 20.000 × 0,10 × 3 e esquecer de somar o capital (isso daria só os R$ 6.000 de juros, não o valor futuro).

2.10. Reserva de contingência (Básico)

Enunciado. A linha de base de custo de um projeto é R$ 200.000. Adota-se uma reserva de contingência de 10 % sobre essa linha (dado de exemplo). Qual é o orçamento com contingência? Se os riscos identificados somam EMV de R$ 26.000, a reserva de 10 % é folgada ou apertada?

Conceito. A reserva de contingência cobre riscos identificados e quantificados. Ela integra o orçamento do projeto. Já a reserva de gerência (fora deste exercício) cobre o desconhecido e fica com o patrocinador.

Fórmula. `orçamento = linha de base × (1 + taxa) , folga = reserva − EMV`

De onde vem. A taxa percentual é um atalho quando ainda não há um registro de riscos maduro. Quando o EMV total já foi calculado, a reserva deveria no mínimo cobrir esse valor esperado.

Resolução

1. **Orçamento com contingência.** Reserva = 0,10 × 200.000 = R$ 20.000. Orçamento = 200.000 + 20.000 = R$ 220.000.
2. **Comparar com o EMV.** EMV = R$ 26.000 > 20.000. A reserva percentual fica R$ 6.000 aquém do valor esperado dos riscos já conhecidos.

Resposta. Orçamento = R$ 220.000 (reserva de R$ 20.000). A reserva de 10 % é apertada: fica R$ 6.000 abaixo do EMV de R$ 26.000.

Interpretação. Uma regra de 10 % é um ponto de partida, não um resultado. Aqui os riscos já conhecidos pedem pelo menos 13 % (26.000 / 200.000), ou uma revisão do registro de riscos.

Erro comum a evitar. Somar a contingência de 10 % em cima do EMV e da linha de base ao mesmo tempo, ou tratar a reserva de gerência como se já estivesse dentro dos 10 %.

2.11. Estimativa no término (EAC) (Intermediário)

Enunciado. No projeto do exercício 2.1, o BAC é R$ 200.000, o CPI é 0,778 e o AC já vai em R$ 90.000. Estime o custo no término se o CPI atual se mantiver.

Conceito. A estimativa no término projeta o custo final a partir do desempenho de agora. A fórmula mais usada, quando não há motivo para o CPI mudar, é dividir o orçamento pelo CPI.

Fórmula. `EAC = (BAC)/(CPI)`

De onde vem. Se cada real de orçamento está rendendo só 0,778 de valor, o projeto inteiro vai custar 1 / 0,778 vezes o BAC. Equivale também a AC + (BAC − EV) / CPI, e as duas formas coincidem quando CPI = EV / AC.

Resolução

1. **Aplicar a fórmula.** EAC = 200.000 / 0,778 = R$ 257.069. Com CPI = 70.000/90.000 = 7/9, EAC = 200.000 × 90.000 / 70.000 = R$ 257.143.
2. **Conferência.** EV = 70.000, então falta 130.000 de valor. A custo atual, isso custa 130.000 / (7/9) = 167.143. Mais o AC de 90.000: 257.143. Fecha.

Resposta. EAC = R$ 257.143 (cerca de R$ 57.000 acima do BAC).

Interpretação. Se nada mudar, o projeto termina uns 29 % mais caro que o orçamento. É um alerta para revisar escopo, produtividade ou reserva, não só para atualizar a planilha.

Erro comum a evitar. Calcular EAC = AC + (BAC − EV) sem dividir o restante pelo CPI (isso daria 90.000 + 130.000 = 220.000 e subestimaria o estouro).

2.12. ETC e variação no término (Intermediário)

Enunciado. Com EAC = R$ 257.143, AC = R$ 90.000 e BAC = R$ 200.000, calcule o ETC (estimativa para completar) e o VAC (variação no término).

Conceito. O ETC é o que ainda falta gastar até o EAC. O VAC é a diferença entre o orçamento original e a estimativa final: negativo significa estouro, positivo significa economia.

Fórmula. `ETC = EAC − AC , VAC = BAC − EAC`

De onde vem. Por definição, o custo final estimado é o que já foi gasto mais o que ainda será gasto. A variação no término compara esse total com o BAC, no mesmo sentido do CV: positivo é favorável.

Resolução

1. **ETC.** ETC = 257.143 − 90.000 = R$ 167.143.
2. **VAC.** VAC = 200.000 − 257.143 = −R$ 57.143.

Resposta. ETC = R$ 167.143; VAC = −R$ 57.143.

Interpretação. Ainda falta gastar mais do que já foi gasto, e o buraco previsto no orçamento é de R$ 57 mil. O VAC negativo é o número que o patrocinador quer ver justificado.

Erro comum a evitar. Calcular VAC = EAC − BAC e reportar +R$ 57.143 como se fosse favorável. No padrão de valor agregado, variação positiva é bem-vinda; por isso VAC = BAC − EAC.

2.13. TCPI para terminar no orçamento (Intermediário)

Enunciado. Ainda no projeto do exercício 2.1, com BAC = R$ 200.000, EV = R$ 70.000 e AC = R$ 90.000, calcule o TCPI para terminar no BAC. O índice é realista?

Conceito. O TCPI é o desempenho de custo que o trabalho restante precisaria ter para caber no orçamento escolhido (aqui, o BAC). Se ele fica muito acima do CPI atual, o alvo é pouco crível sem mudança de escopo ou de método.

Fórmula. `TCPI = (BAC − EV)/(BAC − AC)`

De onde vem. O numerador é o valor que ainda falta entregar. O denominador é o dinheiro que ainda cabe no BAC. A razão é o CPI que o restante do trabalho precisaria ter.

Resolução

1. **Substituir.** TCPI = (200.000 − 70.000) / (200.000 − 90.000) = 130.000 / 110.000 = 1,182.
2. **Comparar com o CPI.** O CPI atual é 0,778. Subir de 0,78 para 1,18 no trabalho restante é um salto grande: o alvo no BAC é ambicioso.

Resposta. TCPI = 1,182. É um alvo exigente, bem acima do CPI atual de 0,778.

Interpretação. Para caber no BAC, o restante precisaria ser feito com 18 % mais eficiência do que o plano original — e muito mais do que o desempenho até agora. Na prática, revisa-se o EAC ou o escopo.

Erro comum a evitar. Usar AC no numerador ou EV no denominador, ou calcular 1 / CPI e chamar isso de TCPI.

2.14. Caminho crítico em uma rede pequena (Intermediário)

Enunciado. Quatro atividades (dados de exemplo): A dura 4 dias e começa o projeto; B dura 3 dias e depende de A; C dura 5 dias e depende de A; D dura 2 dias e depende de B e de C. Quais são os caminhos, o caminho crítico e a duração do projeto?

Conceito. O caminho crítico é a cadeia mais longa de dependências: é ele que determina a duração do projeto e tem folga zero. Qualquer atraso numa atividade crítica empurra o término.

Fórmula. `duração do caminho = soma das durações em série`

De onde vem. B e C são paralelos depois de A; D espera os dois. Logo há dois caminhos de A até D: A–B–D e A–C–D. O mais longo é o crítico.

Resolução

1. **Listar os caminhos.** A–B–D = 4 + 3 + 2 = 9 dias. A–C–D = 4 + 5 + 2 = 11 dias.
2. **Caminho crítico.** O maior é A–C–D, com 11 dias. B tem folga de 11 − 9 = 2 dias.

Resposta. Caminhos: A–B–D = 9 dias e A–C–D = 11 dias. Crítico: A–C–D. Duração do projeto: 11 dias.

Interpretação. A e D estão nos dois caminhos, então são críticas de qualquer jeito. C é crítica; B não é, e pode atrasar até 2 dias sem mover o término.

Erro comum a evitar. Somar as quatro atividades (4+3+5+2 = 14) como se fossem todas em série, ignorando que B e C podem correr em paralelo.

2.15. VPL com fluxos anuais desiguais (Intermediário)

Enunciado. Um investimento de R$ 100.000 devolve, ao fim de cada um dos quatro anos, R$ 20.000, R$ 40.000, R$ 50.000 e R$ 30.000. A taxa é 10 % ao ano (dados de exemplo). Calcule o VPL.

Conceito. Quando os fluxos não são iguais, não vale a anuidade pronta: cada parcela é trazida à data zero com o seu próprio fator 1/(1+i)^t e depois se somam.

Fórmula. `VPL = −I + Σ CF_t / (1 + i)^t`

De onde vem. O valor presente de um fluxo futuro CF_t é CF_t / (1+i)^t, porque o capital de hoje, composto t vezes, precisaria chegar a CF_t. O VPL é a soma desses valores menos o investimento.

Resolução

1. **Trazer cada fluxo.** 20.000 / 1,10 = 18.182. 40.000 / 1,21 = 33.058. 50.000 / 1,331 = 37.566. 30.000 / 1,4641 = 20.490.
2. **Somar e descontar o investimento.** VPL = −100.000 + 18.182 + 33.058 + 37.566 + 20.490 = R$ 9.296.

Resposta. VPL = R$ 9.296. O investimento cria valor à taxa de 10 %.

Interpretação. Mesmo com um primeiro ano fraco (R$ 20.000), os anos 2 e 3 carregam o VPL para o lado positivo. Fluxos maiores mais cedo teriam um VPL ainda melhor, porque sofrem menos desconto.

Erro comum a evitar. Somar os quatro fluxos (140.000) e descontar o investimento sem trazer a valor presente, o que daria +R$ 40.000 — mais de quatro vezes o VPL verdadeiro.

2.16. Payback descontado (Intermediário)

Enunciado. Retome a esteira do exercício 2.2: investimento de R$ 120.000, economia de R$ 40.000 por ano, 4 anos, taxa de 10 %. Em que ano o VPL acumulado muda de sinal? Qual é o payback descontado interpolado?

Conceito. O payback descontado é o instante em que o valor presente acumulado das economias iguala o investimento. Ele corrige o payback simples, que no exercício 2.2 era de exatamente 3 anos.

Fórmula. `S_t = Σ CF / (1 + i)^k (k de 1 a t)`

De onde vem. Acumulam-se os valores presentes ano a ano até ultrapassar I. A fração do último ano é o que ainda faltava dividido pelo valor presente daquele ano.

Resolução

1. **Valores presentes anuais.** Ano 1: 40.000/1,10 = 36.364 (acum. 36.364). Ano 2: 40.000/1,21 = 33.058 (acum. 69.422). Ano 3: 40.000/1,331 = 30.053 (acum. 99.475). Ano 4: 40.000/1,4641 = 27.320.
2. **Interpolação.** No fim do ano 3 faltam 120.000 − 99.475 = 20.525. Fração = 20.525 / 27.320 = 0,75. Payback descontado = 3,75 anos.

Resposta. O saldo presente vira positivo no quarto ano. Payback descontado = 3,75 anos (ante 3,0 anos no payback simples).

Interpretação. O desconto alonga o payback em três quartos de ano. É coerente com o VPL apertado do exercício 2.2: o projeto se paga, mas só perto do fim da vida útil adotada.

Erro comum a evitar. Achar que o payback descontado também é 3,0 anos, porque o fluxo nominal é constante. O valor presente de cada ano cai, então o terceiro ano não chega a cobrir o investimento.

2.17. Árvore de decisão com duas opções (Intermediário)

Enunciado. Opção A: investir R$ 10.000, com 60 % de chance de receita de R$ 40.000 e 40 % de receita nula. Opção B: investir R$ 5.000 e ter receita certa de R$ 12.000 (dados de exemplo). Qual opção tem maior EMV líquido?

Conceito. Em uma árvore de decisão, cada ramo tem um valor esperado. Escolhe-se o ramo de maior EMV líquido (receita esperada menos o investimento). A decisão é racional em média, não em cada cenário isolado.

Fórmula. `EMV = p × receita_boa + (1 − p) × receita_ruim − investimento`

De onde vem. A esperança da receita é a média ponderada pelos dois cenários. Subtraindo o investimento (custo certo), obtém-se o EMV líquido da opção.

Resolução

1. **Opção A.** Receita esperada = 0,60 × 40.000 + 0,40 × 0 = 24.000. EMV_A = 24.000 − 10.000 = R$ 14.000.
2. **Opção B.** EMV_B = 12.000 − 5.000 = R$ 7.000. A opção A é melhor por R$ 7.000 de EMV.

Resposta. EMV_A = R$ 14.000; EMV_B = R$ 7.000. Escolhe-se a opção A.

Interpretação. A é melhor em média, mas em 40 % dos casos a receita é zero e o prejuízo é de R$ 10.000. Se o projeto não puder absorver esse prejuízo, a opção B, menor e certa, pode ser a escolha prudente.

Erro comum a evitar. Comparar só as receitas cheias (40.000 contra 12.000) sem descontar o investimento e sem ponderar pela probabilidade.

2.18. Duração PERT de uma atividade (Intermediário)

Enunciado. Uma atividade tem estimativas otimista 4 dias, mais provável 6 dias e pessimista 10 dias (dados de exemplo). Calcule a duração esperada te, o desvio-padrão σ e a variância.

Conceito. O PERT clássico trata a duração como uma distribuição beta aproximada por três pontos. A média pondera o valor mais provável com peso 4, e o desvio-padrão é um sexto da amplitude entre os extremos.

Fórmula. `t_e = (o + 4m + p)/(6) , σ = (p − o)/(6)`

De onde vem. A amplitude de seis desvios-padrão cobre praticamente toda uma curva em forma de sino. Daí σ = (p − o)/6. A média ponderada o+4m+p sobre 6 é a aproximação tradicional da média da beta usada no PERT.

Resolução

1. **Duração esperada.** t_e = (4 + 4×6 + 10) / 6 = (4 + 24 + 10) / 6 = 38/6 = 6,33 dias.
2. **Dispersão.** σ = (10 − 4) / 6 = 1,00 dia. Variância = σ² = 1,00 dia².

Resposta. t_e = 6,33 dias; σ = 1,00 dia; variância = 1,00 dia².

Interpretação. A duração esperada (6,33) fica um pouco acima do mais provável (6), porque a cauda pessimista é mais longa (até 10) do que a otimista (até 4). Isso é típico de atividades de projeto.

Erro comum a evitar. Usar a média aritmética (4+6+10)/3 = 6,67 ou tomar σ = p − o, sem dividir por 6.

2.19. Ponto de equilíbrio (Intermediário)

Enunciado. Uma célula de teste tem custo fixo de R$ 30.000 no período, custo variável de R$ 50 por ensaio e preço interno de R$ 80 por ensaio (dados de exemplo). Qual é o ponto de equilíbrio em número de ensaios e em receita?

Conceito. O ponto de equilíbrio é a quantidade em que a receita cobre exatamente os custos fixos e variáveis. Abaixo dele o pacote dá prejuízo; acima, contribuição positiva.

Fórmula. `Q_e = (C_fixo)/(preço − C_var)`

De onde vem. A receita é p Q e o custo total é C_f + c_v Q. Igualando, p Q = C_f + c_v Q, logo Q (p − c_v) = C_f. O denominador é a margem de contribuição unitária.

Resolução

1. **Margem unitária.** p − c_v = 80 − 50 = R$ 30 por ensaio.
2. **Quantidade e receita.** Q_e = 30.000 / 30 = 1.000 ensaios. Receita de equilíbrio = 1.000 × 80 = R$ 80.000.

Resposta. Q_e = 1.000 ensaios; receita de equilíbrio = R$ 80.000.

Interpretação. A célula precisa de mil ensaios no período só para empatar. Qualquer ociosidade abaixo disso come o custo fixo; um contrato de volume ajuda a sair dessa zona.

Erro comum a evitar. Dividir o custo fixo pelo preço (30.000/80 = 375) e esquecer o custo variável, o que subestima muito o equilíbrio.

2.20. Taxa interna de retorno aproximada (Intermediário)

Enunciado. Na esteira do exercício 2.2 (investimento de R$ 120.000 e quatro economias anuais de R$ 40.000), a TIR é a taxa que zera o VPL. Calcule-a por interpolação entre 12 % e 13 %.

Conceito. A TIR é a taxa de desconto que torna o VPL nulo. Se a TIR supera a taxa mínima de atratividade (aqui, 10 %), o investimento cria valor. Com anuidade, a TIR resolve o fator de anuidade igual a I/CF.

Fórmula. `VPL(TIR) = 0 ⇒ CF × (1 − (1 + TIR)^(−n))/(TIR) = I`

De onde vem. O fator de anuidade de 4 anos deve valer 120.000/40.000 = 3,000. Calcula-se o VPL em duas taxas vizinhas e interpola-se linearmente o zero.

Resolução

1. **VPL nas duas taxas.** A 12 %, o fator é (1 − 1,12^(−4)) / 0,12 = 3,0373 e VPL = 40.000 × 3,0373 − 120.000 = R$ 1.494. A 13 %, o fator é 2,9745 e VPL = −R$ 1.021.
2. **Interpolação.** TIR ≈ 12 % + 1 % × 1.494 / (1.494 + 1.021) = 12 % + 0,59 % = 12,6 %.

Resposta. TIR ≈ 12,6 % ao ano, acima da taxa de 10 % do exercício 2.2, coerente com o VPL positivo.

Interpretação. A TIR de 12,6 % confirma que o projeto passa em 10 % e falharia se a taxa mínima subisse a 13 %. A interpolação linear entre 12 % e 13 % já dá um dígito confiável.

Erro comum a evitar. Tomar a TIR como igual ao ROI médio anual de 8,33 % do exercício 2.4. São contas diferentes: a TIR é composta e zera o VPL.

2.21. EAC considerando custo e prazo (IEAC) (Desafio)

Enunciado. No projeto do exercício 2.1, BAC = R$ 200.000, EV = R$ 70.000, AC = R$ 90.000, CPI = 0,778 e SPI = 0,875. Calcule o EAC simples (BAC/CPI) e o IEAC = AC + (BAC − EV)/(CPI × SPI). Compare.

Conceito. Quando o projeto está atrasado e acima do orçamento, o trabalho restante costuma sofrer os dois efeitos: mais caro e mais lento (o que também encarece). O índice composto CPI × SPI gera uma estimativa mais pessimista, às vezes chamada IEAC ou EAC de custo-prazo.

Fórmula. `EAC = (BAC)/(CPI) , IEAC = AC + (BAC − EV)/(CPI × SPI)`

De onde vem. A fórmula simples assume que só o CPI se mantém. A composta trata o trabalho restante como se a eficiência conjunta de custo e prazo, CPI × SPI, fosse o novo ‘CPI’ do que falta.

Resolução

1. **EAC simples.** EAC = 200.000 / 0,778 = R$ 257.143.
2. **Índice composto.** CPI × SPI = 0,7778 × 0,875 = 0,6806.
3. **IEAC.** IEAC = 90.000 + 130.000 / 0,6806 = 90.000 + 190.966 = R$ 280.966, cerca de R$ 281.000.

Resposta. EAC simples = R$ 257.143; IEAC = R$ 280.966 (cerca de R$ 281.000).

Interpretação. O atraso acrescenta cerca de R$ 24.000 à projeção. Se o calendário apertado gerar hora extra ou retrabalho, a fórmula composta é o cenário mais honesto para conversar com o patrocinador.

Erro comum a evitar. Multiplicar CPI × SPI no numerador, ou aplicar o índice composto também sobre o AC (o que já foi gasto não deve ser ‘corrigido’ de novo).

2.22. Comparar dois investimentos por VPL e TIR (Desafio)

Enunciado. Dois projetos pedem R$ 100.000 e duram 4 anos, com taxa de 10 % (dados de exemplo). O projeto A devolve R$ 35.000 por ano. O projeto B devolve R$ 50.000, R$ 40.000, R$ 20.000 e R$ 10.000. Calcule o VPL de cada um e a TIR aproximada de A, e escolha pelo VPL.

Conceito. Com o mesmo investimento e a mesma taxa, o critério de criação de valor é o VPL. A TIR é útil, mas pode divergir do VPL quando os perfis de fluxo são muito diferentes; em conflito, prevalece o VPL à taxa da empresa.

Fórmula. `VPL_A = −I + CF × fator de anuidade , VPL_B = −I + Σ CF_t / (1 + i)^t`

De onde vem. A é uma anuidade, como no exercício 2.2. B usa a soma parcela a parcela do exercício 2.15. A TIR de A é a taxa que zera o VPL da anuidade de R$ 35.000.

Resolução

1. **VPL de A.** Fator a 10 % e 4 anos = 3,1699. VPL_A = −100.000 + 35.000 × 3,1699 = R$ 10.945.
2. **TIR de A.** O fator de anuidade deve ser 100.000/35.000 = 2,857. A 15 %, o fator é 2,855, logo TIR_A ≈ 15,0 %.
3. **VPL de B.** 50.000/1,10 + 40.000/1,21 + 20.000/1,331 + 10.000/1,4641 = 45.455 + 33.058 + 15.026 + 6.830 = 100.369. VPL_B = 369, ou R$ 369.

Resposta. VPL_A = R$ 10.945 (TIR ≈ 15,0 %); VPL_B = R$ 369. Pelo VPL, escolhe-se A.

Interpretação. B entrega muito no começo e quase nada no fim; à taxa de 10 % isso quase só empata. A entrega de forma constante e cria cerca de R$ 11 mil de valor. Mesmo com TIR alta, o critério de escolha entre os dois é o VPL.

Erro comum a evitar. Escolher B porque o primeiro fluxo (R$ 50.000) é o maior, sem trazer o conjunto a valor presente.

2.23. Folgas quando há dois caminhos (Desafio)

Enunciado. Na rede do exercício 2.14 (A = 4, B = 3, C = 5, D = 2 dias), calcule ES, EF, LS, LF e a folga de cada atividade. Confirme quais são críticas.

Conceito. A passagem para frente calcula os inícios e términos mais cedo; a passagem para trás, os mais tarde. A folga é a diferença. Atividades com folga zero formam o caminho crítico.

Fórmula. `folga = LS − ES = LF − EF`

De onde vem. ES de uma atividade é o maior EF dos predecessores. LF é o menor LS dos sucessores. No fim do projeto, LF do último nó é a duração crítica (11 dias).

Resolução

1. **Passagem para frente.** A: ES=0, EF=4. B: ES=4, EF=7. C: ES=4, EF=9. D espera B e C, logo ES=9, EF=11. Duração do projeto = 11.
2. **Passagem para trás.** D: LF=11, LS=9. B: LF=9, LS=6. C: LF=9, LS=4. A precisa alimentar B (LS=6) e C (LS=4), logo LF=4, LS=0.
3. **Folgas.** A: 0; B: 6−4=2; C: 0; D: 0. Críticas: A, C e D, o caminho A–C–D.

Resposta. Folgas: A = 0, B = 2, C = 0, D = 0 dias. Atividades críticas: A, C e D.

Interpretação. A conta fecha com o exercício 2.14: o caminho A–C–D tem 11 dias e folga zero. B pode atrasar 2 dias até colar em D. Se B passar de 5 dias, o crítico muda.

Erro comum a evitar. Dar a A a folga de B (2 dias), esquecendo que A também alimenta C, que já é crítica.

2.24. EMV de três riscos independentes (Desafio)

Enunciado. Três riscos independentes (dados de exemplo): R1 com 20 % e impacto de R$ 50.000; R2 com 15 % e R$ 80.000; R3 com 40 % e R$ 10.000. Calcule o EMV de cada um e o EMV total a reservar.

Conceito. Quando os riscos são independentes, o valor esperado total é a soma dos valores esperados. Isso vale mesmo que os eventos não sejam mutuamente exclusivos: a esperança da soma é a soma das esperanças.

Fórmula. `EMV_total = Σ p_i × impacto_i`

De onde vem. A linearidade da esperança não exige exclusão mútua. O que ela não dá é o pior caso (se os três ocorrerem juntos) nem a distribuição completa; só o centro de gravidade para dimensionar a reserva.

Resolução

1. **Cada risco.** EMV_1 = 0,20 × 50.000 = 10.000. EMV_2 = 0,15 × 80.000 = 12.000. EMV_3 = 0,40 × 10.000 = 4.000.
2. **Total.** EMV = 10.000 + 12.000 + 4.000 = R$ 26.000.

Resposta. EMV_1 = R$ 10.000; EMV_2 = R$ 12.000; EMV_3 = R$ 4.000; total = R$ 26.000.

Interpretação. R$ 26.000 é a reserva esperada, a mesma que no exercício 2.10 deixava a contingência de 10 % apertada. O pior caso (R$ 140.000) é outra conversa: isso se cobre com reserva de gerência ou com um plano de resposta, não com o EMV.

Erro comum a evitar. Somar as probabilidades (75 %) e aplicar sobre a soma dos impactos, ou tratar os riscos como mutuamente exclusivos e ficar só com o maior EMV.

2.25. Curva S em um marco (Desafio)

Enunciado. No fim do terceiro mês, o plano previa PV = R$ 60.000, o valor agregado é EV = R$ 50.000 e o custo real é AC = R$ 70.000 (dados de exemplo). Calcule CV, SV, CPI e SPI e descreva a posição na curva S.

Conceito. A curva S junta no tempo o PV (plano), o EV (valor agregado) e o AC (custo real). Num marco, a leitura é a mesma do exercício 2.1, mas agora você vê o projeto caminhar mês a mês.

Fórmula. `CV = EV − AC , SV = EV − PV , CPI = (EV)/(AC) , SPI = (EV)/(PV)`

De onde vem. São as definições padrão de valor agregado, aplicadas a um ponto da curva S. Graficamente, EV abaixo de PV é atraso; AC acima de EV é estouro de custo.

Resolução

1. **Variações.** CV = 50.000 − 70.000 = −R$ 20.000. SV = 50.000 − 60.000 = −R$ 10.000.
2. **Índices.** CPI = 50.000/70.000 = 0,714. SPI = 50.000/60.000 = 0,833.

Resposta. CV = −R$ 20.000; SV = −R$ 10.000; CPI = 0,714; SPI = 0,833. Na curva S, o EV está abaixo do PV e o AC está acima do EV: atrasado e acima do orçamento.

Interpretação. O desenho típico de um projeto em dificuldade é AC no alto, EV embaixo e PV no meio. Aqui os dois desvios já são visíveis no terceiro mês, quando ainda dá tempo de agir.

Erro comum a evitar. Ler só o AC contra o PV (70.000 vs 60.000) e chamar isso de atraso. Esse gap mistura custo e prazo; quem mede prazo é o EV contra o PV.

2.26. Fazer ou comprar (Desafio)

Enunciado. Fazer internamente um dispositivo custa R$ 40.000 fixos mais R$ 20 por unidade. Comprar pronto custa R$ 35 por unidade (dados de exemplo). Para um volume de 4.000 unidades, qual é a melhor opção? Qual é o volume de equilíbrio?

Conceito. A decisão de fazer ou comprar compara o custo total de cada alternativa no volume previsto. O volume de equilíbrio é aquele em que as duas curvas se cruzam: abaixo dele, em geral, compra-se; acima, o fixo da produção se dilui.

Fórmula. `C_fazer = C_f + c_v Q , C_comprar = p Q , Q_e = (C_f)/(p − c_v)`

De onde vem. Igualando C_f + c_v Q = p Q, vem Q (p − c_v) = C_f. O denominador é o que se economiza por unidade ao produzir em vez de comprar.

Resolução

1. **Custos no volume previsto.** Fazer: 40.000 + 20 × 4.000 = R$ 120.000. Comprar: 35 × 4.000 = R$ 140.000. Fazer economiza R$ 20.000.
2. **Equilíbrio.** Q_e = 40.000 / (35 − 20) = 40.000 / 15 = 2.667 unidades.

Resposta. Em 4.000 unidades, fazer custa R$ 120.000 e comprar, R$ 140.000. Melhor fazer. Equilíbrio: 2.667 unidades.

Interpretação. Acima de 2.667 unidades o fixo já se pagou em relação à compra. A conta ignora qualidade, prazo de entrega e ocupação da fábrica: se a célula interna estiver saturada, o ‘fazer’ pode ter um custo de oportunidade maior.

Erro comum a evitar. Comparar só R$ 20 com R$ 35 e decidir fazer em qualquer volume, esquecendo os R$ 40.000 fixos, que mandam comprar quando o lote é pequeno.

2.27. Compressão de uma atividade (crashing) (Desafio)

Enunciado. Uma atividade crítica dura 8 dias e custa R$ 10.000 no ritmo normal. Comprimida, dura 5 dias e custa R$ 16.000 (dados de exemplo). Qual é o custo por dia ganho? Se o projeto precisa de 2 dias a menos, quanto se acrescenta ao custo?

Conceito. Comprimir (crashing) reduz a duração de uma atividade crítica às custas de mais recurso (hora extra, turno extra, serviço externo). O indicador é o custo incremental por dia retirado, e só vale a pena comprimir quem está no caminho crítico.

Fórmula. `custo por dia = (C_comprimido − C_normal)/(d_normal − d_comprimida)`

De onde vem. A diferença de custo é o preço de retirar um certo número de dias. Dividindo um pelo outro, obtém-se o custo unitário da compressão, para comparar com o custo de atrasar o projeto.

Resolução

1. **Dias e custo extra.** Dias ganhos no máximo = 8 − 5 = 3 dias. Custo extra total = 16.000 − 10.000 = R$ 6.000.
2. **Custo por dia e para 2 dias.** Custo por dia = 6.000 / 3 = R$ 2.000/dia. Para 2 dias: 2 × 2.000 = R$ 4.000 (duração 6 dias, custo 14.000).

Resposta. Custo por dia = R$ 2.000/dia. Para ganhar 2 dias, acresce R$ 4.000 e a atividade passa a 6 dias.

Interpretação. Se atrasar o projeto custa mais de R$ 2.000 por dia (multa, perda de janela de homologação), comprimir esses 2 dias se justifica. Se a atividade não for crítica, o dinheiro não move a data final.

Erro comum a evitar. Dividir o custo comprimido (16.000) pela duração comprimida (5) e chamar isso de custo por dia ganho. O que importa é o incremental, não o custo médio.

2.28. Sensibilidade do VPL à taxa (Desafio)

Enunciado. Na esteira do exercício 2.2 (I = R$ 120.000, CF = R$ 40.000, 4 anos), calcule o VPL a 10 %, a 12 % e a 13 %. O que isso diz sobre o risco da taxa?

Conceito. A análise de sensibilidade mostra o quanto o VPL se mexe quando a taxa de desconto muda. Um projeto com VPL pequeno na taxa-base pode virar negativo com um aumento modesto da taxa — e isso é um risco, não um detalhe.

Fórmula. `VPL(i) = −I + CF × (1 − (1 + i)^(−n))/(i)`

De onde vem. É a mesma anuidade do exercício 2.2, avaliada em três taxas. A TIR do exercício 2.20 (12,6 %) é exatamente o ponto em que o VPL atravessa o zero.

Resolução

1. **A 10 %.** Fator 3,1699; VPL = R$ 6.795 (exercício 2.2).
2. **A 12 %.** Fator 3,0373; VPL = 40.000 × 3,0373 − 120.000 = R$ 1.494.
3. **A 13 %.** Fator 2,9745; VPL = 40.000 × 2,9745 − 120.000 = −R$ 1.021.

Resposta. VPL(10 %) = R$ 6.795; VPL(12 %) = R$ 1.494; VPL(13 %) = −R$ 1.021. O sinal vira entre 12 % e 13 %.

Interpretação. Três pontos percentuais na taxa apagam todo o valor do projeto e passam a destruir valor. É um investimento sensível: só se sustenta se a taxa mínima estiver bem ancorada abaixo de cerca de 12,6 %.

Erro comum a evitar. Achar que, se o VPL é positivo a 10 %, ele permanece positivo em qualquer taxa ‘próxima’, sem calcular os pontos vizinhos.

2.29. Portfólio com orçamento limitado (Desafio)

Enunciado. Três projetos independentes (dados de exemplo): A custa R$ 50.000 e tem VPL de R$ 20.000; B custa R$ 30.000 e VPL de R$ 15.000; C custa R$ 30.000 e VPL de R$ 12.000. O orçamento é R$ 60.000. Qual combinação maximiza o VPL? Use o índice VPL/investimento como guia.

Conceito. Com capital racionado, não se escolhe só o maior VPL absoluto. O índice VPL/investimento (rentabilidade do capital) ajuda a ranquear, e depois se testa as combinações que cabem no orçamento, porque o índice sozinho pode deixar dinheiro na mesa.

Fórmula. `índice = (VPL)/(investimento)`

De onde vem. O índice diz quanto valor se cria por real investido. Ordenam-se os projetos por esse índice e montam-se as combinações factíveis. A combinação de maior VPL total é a escolhida.

Resolução

1. **Índices.** A: 20.000/50.000 = 0,40. B: 15.000/30.000 = 0,50. C: 12.000/30.000 = 0,40. B é o mais rentável por real.
2. **Combinações que cabem em 60.000.** Só A: VPL 20.000 (custa 50.000). B+C: VPL 27.000 (custa 60.000). Só B ou só C ficam abaixo. A+B ou A+C estouram o orçamento.
3. **Escolha.** B+C entrega VPL de R$ 27.000, melhor que A sozinho (R$ 20.000).

Resposta. Índices: A = 0,40; B = 0,50; C = 0,40. Com R$ 60.000, a melhor combinação é B+C, com VPL de R$ 27.000 (ante R$ 20.000 de A sozinho).

Interpretação. Se você ficasse só com o ‘maior projeto’ (A), deixaria R$ 7.000 de valor na mesa. O orçamento limitado pede combinação, não ranking ingênuo por VPL absoluto.

Erro comum a evitar. Escolher A porque tem o maior VPL individual, ou somar A+B sem checar que 80.000 estoura o teto de 60.000.

2.30. Probabilidade de terminar no prazo (PERT) (Desafio)

Enunciado. O caminho crítico tem duração esperada $t_e = 20$ dias e desvio-padrão $\sigma = 2$ dias (já combinando as variâncias das atividades, dados de exemplo). Qual é a probabilidade de terminar em até 23 dias, no modelo normal?

Conceito. No PERT, a duração do caminho crítico, soma de várias atividades, é aproximada por uma normal de média t_e e desvio σ (raiz da soma das variâncias). A probabilidade de terminar até um prazo T é a área da normal à esquerda de T, calculada pelo escore z.

Fórmula. $z = (T - t_e)/(\sigma)$, $P(D \le T) = \Phi(z)$

De onde vem. Padroniza-se a variável para a normal padrão: z é quantos desvios-padrão o prazo está acima da média. $\Phi(1{,}50) = 0{,}9332$ nas tabelas usuais, cerca de 93,3 %.

Resolução

1. **Escore z.** $z = (23 - 20) / 2 = 3/2 = 1{,}50$.
2. **Probabilidade.** $\Phi(1{,}50) = 0{,}9332$, ou 93,3 % de chance de terminar em 23 dias ou menos.

Resposta. $z = 1{,}50$; P = 93,3 % de terminar em até 23 dias.

Interpretação. Três dias de folga sobre a média, com $\sigma = 2$ dias, já dão uma confiança alta — mas não absoluta. Se o caminho crítico estiver mal identificado, essa probabilidade é otimista.

Erro comum a evitar. Calcular $(23 - 20)/20 = 0{,}15$ e ler isso como 15 % de atraso, ou usar a tabela de z como se 1,50 significasse 1,50 % de risco.

Sistemas de Freios (28 h)

3.1. Distância de parada a 80 km/h (Básico)

Enunciado. O up! vem a 80 km/h. O tempo de reação do motorista é 1,0 s e, na frenagem, usa-se todo o atrito disponível μ = 0,80, em piso plano e seco. Calcule a distância total de parada.

Conceito. A distância total de parada tem dois trechos. No tempo de reação o carro ainda não freou e percorre $s_r = v\,t_r$. Depois, com desaceleração constante $a = \mu g$, a distância de frenagem é $v^2 / (2a)$. A primeira parcela cresce com a velocidade; a segunda, com o quadrado.

Fórmula. `s = v t_r +`

De onde vem. No trecho de reação a velocidade é constante. Na frenagem, $v^2 = v0^2 - 2\,a\,s_f$ com $v = 0$, logo $s_f = v0^2 / (2a)$. O teto de a é μ g, porque a força máxima de atrito é μ m g.

Resolução

1. **Converter a velocidade.** v = 80 / 3,6 = 22,22 m/s.
2. **Trecho de reação.** s_r = 22,22 m/s × 1,0 s = 22,22 m (o carro ainda não freou).
3. **Desaceleração e trecho de frenagem.** a = 0,80 × 9,81 = 7,848 m/s². s_f = (22,22)² / (2 × 7,848) = 493,8 / 15,70 = 31,46 m.
4. **Somar.** s = 22,22 + 31,46 = 53,68 m.

Resposta. s = 53,7 m (22,2 m de reação + 31,5 m de frenagem). A desaceleração é 7,85 m/s².

Interpretação. Quase 40 % da distância ainda é o segundo de reação. A 120 km/h o trecho de reação sobe para 33 m e o de frenagem, que cresce com v², passa de 70 m.

Erro comum a evitar. Esquecer o trecho de reação, ou usar 80 no lugar de 22,22 m/s na fórmula de s_f. Outro erro é escrever $s = v^2 / (\mu g)$, sem o 2.

3.2. Torque de freio em uma roda dianteira (Básico)

Enunciado. Na frenagem a 0,70 g do exercício 1.2, a força total de freio se reparte na mesma proporção das normais dinâmicas (repartição ideal). Calcule o torque de freio em uma roda dianteira, no raio da roda.

Conceito. A repartição ideal entrega a cada eixo uma força de freio proporcional à normal dinâmica daquele eixo. Assim os dois eixos chegam ao limite de atrito juntos. O torque no raio da roda é a força daquela roda vezes o raio dinâmico.

Fórmula. `\u03c4 = F_x r , F_xd = (F_zd)/(m g) m a`

De onde vem. A força total é F = m a. A parcela dianteira é a fração F_zd / (m g) dessa força. Metade vai para cada roda dianteira, e \u03c4 = F_roda r. As normais do exercício 1.2 são F_zd = 6 144 N e m g = 8 829 N.

Resolução

1. **Força total de freio.** a = 0,70 × 9,81 = 6,867 m/s². F = 900 × 6,867 = 6 180 N.
2. **Parcela do eixo dianteiro.** A normal dianteira é 6 144 N em 8 829 N (69,58 %). Então F_xd = 0,6958 × 6 180 = 4 300 N.
3. **Uma roda e o torque.** F por roda = 4 300 / 2 = 2 150 N. \u03c4 = 2 150 × 0,29 = 624 N\u00b7m.

Resposta. \u03c4 = 624 N\u00b7m em cada roda dianteira.

Interpretação. Esse é o torque no raio do pneu. No disco, o raio efetivo é menor, então a força nas pastilhas é maior. O eixo dianteiro, com quase 70 % da carga, leva a maior parte do trabalho.

Erro comum a evitar. Repartir 50/50 entre os eixos, ou calcular o torque com a força total das duas rodas dianteiras (isso dobraria o resultado para 1 248 N\u00b7m).

3.3. Energia dissipada em uma parada (Básico)

Enunciado. Quanto de energia cinética os freios (e o pneu) precisam dissipar para parar o up! de 80 km/h? Se a frenagem usa μ = 0,80, qual é a potência média?

Conceito. Parar o carro é retirar toda a energia cinética de translação. Essa energia não depende do atrito, só da massa e da velocidade. O atrito muda o tempo da parada e, portanto, a potência média, que é energia dividida pelo tempo.

Fórmula. `E = (1)/(2) m , P_méd = (E)/(t)`

De onde vem. A energia cinética vem do trabalho da resultante, como no exercício 1.5. O tempo de frenagem, com a constante, é t = v / a, com a = μ g. A potência média é E / t, equivalente a F × (v/2), porque a velocidade média na parada é v/2.

Resolução

1. **Energia cinética.** v = 22,22 m/s. E = ½ × 900 × (22,22)² = 222 222 J = 222,2 kJ.
2. **Tempo de frenagem.** t = v / a = 22,22 / 7,848 = 2,83 s.
3. **Potência média.** P = 222 222 / 2,83 = 78,5 kW.

Resposta. E = 222 kJ; t = 2,83 s; P_média = 78,5 kW.

Interpretação. A energia não depende de μ, só da velocidade. O atrito muda o tempo e, portanto, a potência. Em um elétrico, parte dessa energia pode voltar para a bateria; o restante vira calor no freio de fricção.

Erro comum a evitar. Achar que μ maior aumenta a energia dissipada. A energia é a mesma; só se dissipa mais depressa.

3.4. Desaceleração máxima no plano (Básico)

Enunciado. No piso plano e seco, com μ = 0,80, qual é a maior desaceleração que o up! pode atingir, em m/s² e em g? Que força de freio total isso exige?

Conceito. O teto de frenagem, no modelo de atrito de Coulomb e sem aerodinâmica, é a = μ g. A massa se cancela: um carro mais pesado precisa de mais força, mas a desaceleração máxima, em g, é a mesma se μ não mudar.

Fórmula. `a = \u03bc g , F = m a = \u03bc m g`

De onde vem. A 2ª lei é m a = F_atrito ≤ μ N, e no plano N = m g. Logo a ≤ μ g e F ≤ μ m g.

Resolução

1. **Desaceleração.** a = 0,80 × 9,81 = 7,848 m/s², ou 0,80 g.
2. **Força total.** F = 900 × 7,848 = 7 063 N, equivalente a μ vezes o peso 8 829 N.

Resposta. a = 7,85 m/s² = 0,80 g; F = 7 063 N.

Interpretação. Sete a oito décimos de g é uma frenagem forte de um hatch em asfalto seco. O número só cai se o pneu, o piso ou a repartição não permitirem usar todo o μ nas quatro rodas.

Erro comum a evitar. Usar a = μ, com 0,80 m/s², esquecendo o g, ou calcular F = μ m sem o g (720 N, cerca de dez vezes menor).

3.5. Só a distância de frenagem a 60 km/h (Básico)

Enunciado. Com μ = 0,80, em piso plano, calcule a distância e o tempo só de frenagem do up! de 60 km/h até parar (sem tempo de reação).

Conceito. Sem o trecho de reação, restam as equações de desaceleração constante: $s = v^2 / (2\,a)$ e $t = v / a$. A 60 km/h a distância já é bem menor do que a 80 km/h, porque cai com o quadrado da velocidade.

Fórmula. `s = , t = (v)/(\u03bc g)`

De onde vem. São as mesmas relações do exercício 3.1, com $t_r = 0$ e $a = \mu\,g$.

Resolução

1. **Velocidade e desaceleração.** v = 60 / 3,6 = 16,67 m/s. a = 7,848 m/s².
2. **Distância e tempo.** s = (16,67)² / 15,70 = 17,70 m. t = 16,67 / 7,848 = 2,12 s.

Resposta. s = 17,7 m; t = 2,12 s.

Interpretação. De 80 para 60 km/h a distância de frenagem cai de 31,5 m para 17,7 m, fator (60/80)² = 0,56. Reduzir um pouco a velocidade antecipa muito o ponto de parada.

Erro comum a evitar. Incluir um segundo de reação que o enunciado pediu para deixar de fora, ou usar 31,5 m de 80 km/h proporcionalmente a 60/80 (isso daria 23,6 m, ainda alto demais).

3.6. Força de freio a 0,50 g (Básico)

Enunciado. O up! freia em reta, no plano, com desaceleração de 0,50 g. Qual é a força total de freio nas rodas? Que fração do limite de 0,80 g isso representa?

Conceito. Com desaceleração prescrita, a força total segue direto da 2ª lei: $F = m\,a$. Comparar 0,50 g com o teto μ g mostra a margem até o bloqueio, no modelo simples em que as quatro rodas trabalham juntas.

Fórmula. `F = m a = m (0,50 g)`

De onde vem. No plano, desprezando rolamento e arrasto durante a frenagem forte, a única força horizontal relevante é a dos freios (via o pneu). Daí $F = m\,a$.

Resolução

1. **Desaceleração.** a = 0,50 × 9,81 = 4,905 m/s².
2. **Força.** F = 900 × 4,905 = 4 415 N.
3. **Fração do limite.** O teto é 0,80 g, logo 0,50 / 0,80 = 0,625, ou 62,5 % do atrito disponível.

Resposta. F = 4 415 N, equivalentes a 62,5 % do limite de 0,80 g.

Interpretação. Meio g já é uma frenagem firme do dia a dia, mas ainda deixa cerca de 37 % de margem até o atrito máximo. Essa margem some depressa se entrar uma curva ou um piso pior.

Erro comum a evitar. Usar 0,50 m/s² no lugar de 0,50 g (F = 450 N) ou comparar 0,50 com 1, não com 0,80.

3.7. Energia cinética a 100 km/h (Básico)

Enunciado. Calcule a energia que os freios precisam retirar para parar o up! de 100 km/h, em kJ e em kWh, e compare com os 222 kJ a 80 km/h do exercício 3.3.

Conceito. A energia cinética cresce com o quadrado da velocidade. Por isso uma parada de estrada esquenta muito mais os discos do que uma parada urbana, mesmo que o motorista use o mesmo μ.

Fórmula. `E = (1)/(2) m`

De onde vem. É a mesma definição do exercício 3.3. A razão das energias é $(v2/v1)^2$. A conversão é 1 kWh = $3{,}6 \times 10^6$ J.

Resolução

1. **Velocidade e energia.** v = 100 / 3,6 = 27,78 m/s. E = ½ × 900 × $(27{,}78)^2$ = 347 222 J = 347,2 kJ.
2. **Em kWh e comparação.** 347 222 / 3 600 000 = 0,0965 kWh. A razão para 80 km/h é $(100/80)^2$ = 1,5625, e 1,5625 × 222,2 = 347,2 kJ, fecha.

Resposta. E = 347,2 kJ = 0,0965 kWh, ou 56 % a mais do que a 80 km/h.

Interpretação. São quase 350 kJ em uma só parada. Na escala da bateria isso é pouco (0,1 kWh), mas nos discos é um pulso de calor concentrado, sobretudo se a parada se repetir em pouco tempo.

Erro comum a evitar. Escalar a energia com 100/80 = 1,25 em vez de com o quadrado (1,56), o que daria 278 kJ, uma subestimação de 20 %.

3.8. Tempo e distância a 100 km/h (Básico)

Enunciado. Com μ = 0,80, em piso plano, calcule o tempo e a distância só de frenagem do up! de 100 km/h até parar.

Conceito. Com a constante, o tempo cresce linearmente com a velocidade e a distância, com o quadrado. A 100 km/h o trecho de frenagem já se aproxima de 50 m, o comprimento de quase uma quadra.

Fórmula. `t = (v)/(\u03bc g) , s =`

De onde vem. As mesmas equações dos exercícios 3.1 e 3.5, agora com v = 27,78 m/s e a = 7,848 m/s².

Resolução

1. **Tempo.** t = 27,78 / 7,848 = 3,54 s.
2. **Distância.** s = $(27{,}78)^2$ / 15,70 = 49,16 m.

Resposta. t = 3,54 s; s = 49,2 m.

Interpretação. Em relação aos 31,5 m a 80 km/h, a distância sobe 56 %, o mesmo fator da energia. O tempo sobe só 25 %, porque t \u221d v.

Erro comum a evitar. Reaproveitar os 2,83 s de 80 km/h, ou calcular s = v t com a velocidade inicial (isso dobraria a distância para 98 m).

3.9. Comparar frenagens a 80 e a 100 km/h (Básico)

Enunciado. Compare as distâncias só de frenagem (sem reação) do up! a 80 km/h e a 100 km/h, com μ = 0,80. Qual é a razão entre elas?

Conceito. Com a mesma desaceleração, a razão das distâncias é exatamente o quadrado da razão das velocidades. É o mesmo fator que aparece na energia, porque E = F s e F é a mesma no limite de μ.

Fórmula. `(s_2)/(s_1) =`

De onde vem. s = v² / (2 a). Com a igual nos dois casos, s2/s1 = (v2/v1)². Aqui v2/v1 = 100/80 = 1,25 e 1,25² = 1,5625.

Resolução

1. **Distâncias já calculadas.** A 80 km/h, s = 31,46 m (exercício 3.1). A 100 km/h, s = 49,16 m (exercício 3.8).
2. **Razão.** 49,16 / 31,46 = 1,5625 = (100/80)². A distância sobe 56 %.

Resposta. s(80) = 31,5 m; s(100) = 49,2 m; razão = 1,56 = (100/80)².

Interpretação. Subir só 20 km/h alonga a parada em mais da metade. É o argumento clássico de que, em estrada, a velocidade extra custa caro em espaço de emergência.

Erro comum a evitar. Achar que a distância cresce 20 % (o mesmo que a velocidade) ou 25 % (100/80), e não 56 %.

3.10. Torque total no limite de atrito (Básico)

Enunciado. No limite μ = 0,80, calcule a força total de freio e o torque total nas quatro rodas, no raio dinâmico r = 0,29 m. Qual seria o torque médio por roda, se a força se repartisse por igual?

Conceito. O torque total é a força total vezes o raio da roda. Na prática a frente trabalha mais, então o torque médio por roda é só uma referência; o valor real de cada canto depende da normal dinâmica.

Fórmula. `\u03c4_total = F r = \u03bc m g r`

De onde vem. F = μ m g veio do exercício 3.4. O braço é o raio dinâmico, o mesmo em que o pneu toca o piso.

Resolução

1. **Força total.** F = 7 063 N (exercício 3.4).
2. **Torque total e médio.** \u03c4_total = 7 063 × 0,29 = 2 048 N\u00b7m. Média por roda = 2 048 / 4 = 512 N\u00b7m.

Resposta. F = 7 063 N; \u03c4_total = 2 048 N\u00b7m; média por roda = 512 N\u00b7m.

Interpretação. Na repartição ideal a 0,80 g a frente leva cerca de 72 % da força, então cada roda dianteira passa de 700 N\u00b7m e cada traseira fica bem abaixo da média de 512 N\u00b7m.

Erro comum a evitar. Calcular o torque com o raio do disco no lugar do raio do pneu, ou dividir a força por quatro antes de multiplicar pelo raio e esquecer que essa média não é a repartição real.

3.11. Repartição estática versus ideal (Intermediário)

Enunciado. Na frenagem a 0,70 g do exercício 3.2, compare o torque em uma roda dianteira se a força se repartir na proporção estática 55/45 com o torque da repartição ideal (624 N\u00b7m).

Conceito. Uma repartição fixa igual à estática (55 % na frente) não acompanha a transferência de carga. Na frenagem a frente está mais carregada e poderia gerar mais força; se o sistema não lhe entrega essa parcela, o eixo traseiro se aproxima do bloqueio antes da frente.

Fórmula. `\u03c4_est = (0,55 m a)/(2) r , \u03c4_ideal = (F_zd)/(m g) (m a)/(2) r`

De onde vem. Na repartição estática, 55 % de F vai para o eixo dianteiro, metade para cada roda. Na ideal, a fração é F_zd / (m g) = 69,58 %, como no exercício 3.2.

Resolução

1. **Repartição estática.** F_xd,est = 0,55 × 6 180 = 3 399 N. Por roda: 1 700 N. \u03c4_est = 1 700 × 0,29 = 493 N\u00b7m.
2. **Comparar com a ideal.** A ideal era 624 N\u00b7m. A estática entrega 493 / 624 = 79 % do torque que a dianteira poderia aplicar.

Resposta. Repartição estática: 493 N\u00b7m. Ideal: 624 N\u00b7m. A estática entrega só 79 % do torque dianteiro ideal.

Interpretação. A diferença de 131 N\u00b7m é exatamente a transferência de carga que a frente ganhou e a repartição fixa não acompanha. Por isso os sistemas reais usam uma curva um pouco acima de 55 %, ou um EBD que se aproxima da ideal.

Erro comum a evitar. Achar que 55 % estáticos já são a repartição ideal em qualquer desaceleração, ou inverter os eixos (colocar 45 % na frente).

3.12. Pressão no cilindro mestre (Intermediário)

Enunciado. O motorista aplica 250 N no pedal. A alavanca do pedal vale 4 e o servo multiplica por mais 4. O cilindro mestre tem diâmetro de 20 mm (dados de exemplo). Qual é a pressão no circuito?

Conceito. No circuito hidráulico a pressão é a força no êmbolo do cilindro mestre dividida pela área. A força no êmbolo é a força do pé vezes a alavanca do pedal e o ganho do servo. Essa pressão, depois, atua nos pistões das pinças.

Fórmula. `p = (F_pedal i_pedal i_servo)/(A_mestre) , A = \u03c0 d\u00b2 / 4`

De onde vem. A alavanca e o servo multiplicam a força; a área converte força em pressão. Com d = 20 mm, o raio é 10 mm e A = \u03c0 (0,010)².

Resolução

1. **Força no êmbolo.** F = 250 × 4 × 4 = 4 000 N.
2. **Área do mestre.** A = \u03c0 × (0,010)² = 3,142 × 10^{-4} m².
3. **Pressão.** p = 4 000 / 3,142e-4 = 1,273 × 10^7 Pa = 12,73 MPa (cerca de 127 bar).

Resposta. p = 12,73 MPa, cerca de 127 bar.

Interpretação. É uma pressão típica de um circuito de passeio em frenagem firme. Sem o servo, a mesma força no pé geraria só 3,18 MPa, e o motorista não atingiria o μ do pneu com conforto.

Erro comum a evitar. Usar o diâmetro como se fosse o raio (área quatro vezes maior, pressão quatro vezes menor) ou esquecer o servo na multiplicação.

3.13. Parada a 80 km/h no piso molhado (Intermediário)

Enunciado. Repita o exercício 3.1 com μ = 0,40 (piso molhado) e o mesmo tempo de reação de 1,0 s. Qual é a nova distância total, e quanto ela cresce em relação aos 53,7 m do piso seco?

Conceito. O trecho de reação não depende de μ. Já o trecho de frenagem é inversamente proporcional ao atrito: pela metade o μ, dobra a distância de frenagem. Por isso o molhado alonga sobretudo a segunda parcela.

Fórmula. `s = v t_r +`

De onde vem. A mesma fórmula do exercício 3.1, com μ = 0,40. s_f,molhado / s_f,seco = 0,80 / 0,40 = 2.

Resolução

1. **Reação (igual).** s_r = 22,22 m.
2. **Frenagem no molhado.** a = 0,40 × 9,81 = 3,924 m/s². s_f = 493,8 / 7,848 = 62,92 m.
3. **Total e comparação.** s = 22,22 + 62,92 = 85,15 m. São 31,5 m a mais do que no seco (53,7 m), um aumento de 59 %.

Resposta. s = 85,1 m (22,2 m de reação + 62,9 m de frenagem), 31,5 m a mais do que no seco.

Interpretação. A distância de frenagem dobra, de 31,5 m para 62,9 m. O total não dobra porque o segundo de reação continua o mesmo. Mesmo assim, são quase 85 m até parar.

Erro comum a evitar. Dobrar os 53,7 m inteiros (107 m), como se o trecho de reação também dependesse de μ.

3.14. Aquecimento de um disco dianteiro (Intermediário)

Enunciado. Na parada de 80 km/h do exercício 3.3, um disco dianteiro absorve 35 % da energia cinética. O disco tem massa 4,0 kg e calor específico 460 J/(kg\u00b7K) (dados de exemplo). Qual é o aumento de temperatura, admitindo que não há troca de calor no instante da parada?

Conceito. Em uma parada curta o calor não dá tempo de sair do disco: o processo é quase adiabático. A energia que entra no disco é m_d c ΔT. A fração de 35 % é coerente com um eixo dianteiro que leva cerca de 70 % da energia, dividida pelos dois discos.

Fórmula. `\u0394T = (f E)/(m_d c)`

De onde vem. A definição de calor específico é Q = m c ΔT. Com Q = f E e E = 222,2 kJ, isola-se ΔT. O modelo ignora a pastilha, o cubo e a convecção durante a parada.

Resolução

1. **Energia no disco.** Q = 0,35 × 222 222 = 77 778 J.
2. **Variação de temperatura.** ΔT = 77 778 / (4,0 × 460) = 77 778 / 1 840 = 42,3 K (ou 42,3 °C).

Resposta. ΔT = 42,3 K.

Interpretação. Quarenta graus em uma parada já são relevantes. Em uma sequência de descidas ou em um ensaio repetido, a temperatura acumula e o μ da pastilha cai — o fade do exercício 3.25.

Erro comum a evitar. Usar a energia inteira de 222 kJ no disco (ΔT ≈ 121 K) ou esquecer de converter a velocidade antes de calcular E.

3.15. Potência de pico no início da frenagem (Intermediário)

Enunciado. Na parada a 80 km/h com μ = 0,80, qual é a potência instantânea no instante em que o freio atinge o limite de atrito? Compare com a potência média de 78,5 kW do exercício 3.3.

Conceito. A potência instantânea é F v. Ela é máxima no começo, quando a velocidade ainda é a inicial, e cai linearmente até zero no instante da parada. A média, com a constante, é exatamente a metade do pico.

Fórmula. `P_pico = F v = \u03bc m g v , P_méd = P_pico / 2`

De onde vem. P(t) = F (v0 − a t), uma reta. A média de uma reta que vai de P_pico a zero é P_pico / 2. Isso confere com E / t do exercício 3.3.

Resolução

1. **Força e velocidade.** F = 7 063 N e v = 22,22 m/s.
2. **Pico e comparação.** P_pico = 7 063 × 22,22 = 157,0 kW, o dobro da média de 78,5 kW.

Resposta. P_pico = 157 kW, o dobro da potência média de 78,5 kW.

Interpretação. Cento e cinquenta e sete quilowatts é da ordem da potência de um motor médio, concentrada nos discos por poucos segundos. É por isso que o disco precisa de massa térmica e de ventilação, não só de μ na pastilha.

Erro comum a evitar. Igualar a potência de pico à média, ou usar P = E / t e chamá-la de pico. A média já é E / t; o pico é o dobro.

3.16. Frenagem numa descida de 10 % (Intermediário)

Enunciado. O up! desce uma rampa de 10 % e freia no limite μ = 0,80. Qual é a desaceleração? Compare com os 7,85 m/s² do plano.

Conceito. Na descida a componente do peso aponta no sentido do movimento e rouba parte da força de atrito que poderia desacelerar o carro. A normal também cai um pouco, porque N = m g cos θ.

Fórmula. `a = g (\u03bc cos \u03b8 \u2212 sen \u03b8) , sen \u03b8 =`

De onde vem. O somatório na direção da pista é m a = μ N − m g sen θ, com N = m g cos θ. Daí a = g (μ cos θ − sen θ). A rampa de 10 % tem tan θ = 0,10, logo sen θ = 0,10 / \u221a1,01 e cos θ = 1 / \u221a1,01.

Resolução

1. **Seno e cosseno.** sen θ = 0,10 / \u221a1,01 = 0,09950. cos θ = 1 / \u221a1,01 = 0,9950.
2. **Desaceleração.** a = 9,81 × (0,80 × 0,9950 − 0,09950) = 9,81 × 0,6965 = 6,83 m/s².
3. **Comparar.** No plano eram 7,85 m/s². A descida de 10 % tira 1,02 m/s² (13 %).

Resposta. a = 6,83 m/s², ante 7,85 m/s² no plano.

Interpretação. A rampa come atrito de duas maneiras: o peso empurra para baixo e a normal cai um pouco. Em uma descida longa, além dessa perda de a, entra o problema térmico do exercício 3.29.

Erro comum a evitar. Tratar 10 % como 10° (sen 10° = 0,174, uma rampa bem mais íngreme) ou esquecer o termo −g sen θ e usar só μ g cos θ.

3.17. Força nas pastilhas do disco dianteiro (Intermediário)

Enunciado. No torque de 624 N\u00b7m do exercício 3.2, o disco tem raio efetivo 110 mm, duas pastilhas e coeficiente de atrito da pastilha 0,35 (dados de exemplo). Qual é a força normal em cada pastilha?

Conceito. O torque no disco é a força de atrito das pastilhas vezes o raio efetivo. Com duas pastilhas, cada uma contribui μ_p N, então \u03c4 = 2 μ_p N r_ef. O raio efetivo é menor que o da roda, por isso N é bem maior do que a força no pneu.

Fórmula. `\u03c4 = 2 \u03bc_p N r_ef \u21d2 N = (\u03c4)/(2 \u03bc_p r_ef)`

De onde vem. Cada pastilha gera força de atrito μ_p N no raio efetivo. As duas atuam no mesmo sentido de giro (uma de cada lado do disco), daí o fator 2.

Resolução

1. **Substituir.** N = 624 / (2 × 0,35 × 0,110) = 624 / 0,077 = 8 104 N.

Resposta. N = 8 104 N em cada pastilha.

Interpretação. Oito quilonewtons em cada face — cerca de 830 kgf — para gerar os 2 150 N no pneu. A alavanca geométrica do raio da roda contra o raio do disco (0,29 / 0,11 ≈ 2,6) e o μ da pastilha explicam essa amplificação.

Erro comum a evitar. Esquecer o fator 2 das duas pastilhas (o dobro da força) ou usar o raio da roda no lugar do raio efetivo do disco.

3.18. Atraso de atuação de 0,30 s (Intermediário)

Enunciado. Além do 1,0 s de reação do exercício 3.1, o sistema hidráulico leva 0,30 s para atingir a pressão de freio (dado de exemplo). Qual é a nova distância total de parada a 80 km/h, com μ = 0,80?

Conceito. Qualquer atraso entre a decisão e a força plena é mais um trecho percorrido quase à velocidade inicial. Em um modelo simples, soma-se v × t_atraso à distância já calculada. Sistemas como o AEB tentam cortar justamente esse tempo.

Fórmula. `s = v (t_r + t_a) +`

De onde vem. O atraso de atuação entra como mais um intervalo à velocidade constante, ao lado do tempo de reação. A parcela de frenagem permanece a do exercício 3.1.

Resolução

1. **Trecho extra.** s_a = 22,22 × 0,30 = 6,67 m.
2. **Total.** s = 53,68 + 6,67 = 60,35 m.

Resposta. s = 60,3 m, isto é, 6,7 m a mais do que os 53,7 m do exercício 3.1.

Interpretação. Trezentos milissegundos parecem pouco, mas a 80 km/h valem quase 7 m — o comprimento do próprio carro. É o tipo de margem que um assistente de frenagem de emergência tenta recuperar.

Erro comum a evitar. Somar 0,30 s ao tempo de frenagem (2,83 s) e recalcular s = v t / 2, misturando atraso com desaceleração.

3.19. Freio de estacionamento numa rampa de 20 % (Intermediário)

Enunciado. O up! precisa ficar parado numa rampa de 20 %. Qual é a força mínima de freio, paralela ao piso, que o freio de estacionamento tem de garantir? Despreze o rolamento.

Conceito. Parado, a força de freio só precisa equilibrar a componente do peso na rampa, m g sen θ. O estacionamento em geral atua só no eixo traseiro, então essa força tem de caber no atrito daquele eixo, com a normal da rampa.

Fórmula. `F = m g sen \u03b8 , sen \u03b8 =`

De onde vem. Equilíbrio estático na direção da pista: F − m g sen θ = 0. Com i = tan θ = 0,20, sen θ = 0,20 / \u221a1,04.

Resolução

1. **Seno da rampa.** sen θ = 0,20 / \u221a1,04 = 0,20 / 1,0198 = 0,1961.
2. **Força.** F = 900 × 9,81 × 0,1961 = 1 732 N. A aproximação m g × 0,20 daria 1 766 N, 2 % a mais.

Resposta. F = 1 732 N.

Interpretação. Mil setecentos newtons não são muito em relação ao peso, mas precisam estar no eixo que o freio de mão (ou o EPB) segura. Se só a traseira trabalha, a normal na rampa e o μ têm de ser suficientes para esses 1 732 N.

Erro comum a evitar. Usar 20° no lugar de 20 %, ou esquecer o seno e calcular μ m g como se fosse uma parada de emergência.

3.20. Desaceleração só com o freio regenerativo (Intermediário)

Enunciado. Um motor elétrico recupera 30 kW constantes na roda a 80 km/h (dado de exemplo). Qual é a desaceleração do up!, desprezando rolamento e arrasto? Compare com o limite de 0,80 g.

Conceito. A força de recuperação é P / v, e a desaceleração é essa força dividida pela massa. Trinta quilowatts a 80 km/h dão uma frenagem suave, típica do ‘one pedal’ em cruzeiro, bem abaixo do atrito máximo do pneu.

Fórmula. `F = (P)/(v) , a = (P)/(m v)`

De onde vem. A potência mecânica é P = F v, logo F = P / v. A 2ª lei, sem resistências, é a = F / m.

Resolução

1. **Força.** v = 22,22 m/s. F = 30 000 / 22,22 = 1 350 N.
2. **Desaceleração.** a = 1 350 / 900 = 1,50 m/s² = 0,153 g, cerca de 19 % do limite de 0,80 g.

Resposta. a = 1,50 m/s² = 0,153 g, cerca de 19 % do limite de 0,80 g.

Interpretação. O regenerativo sozinho segura bem um cruzeiro e uma desaceleração suave, mas não uma emergência. Para 0,80 g ainda entra o freio de fricção — é o blend do exercício 3.28.

Erro comum a evitar. Usar P = F a ou deixar 80 km/h na divisão (F = 30 000 / 80 = 375 N, quase quatro vezes menor).

3.21. Quando o eixo traseiro levanta (Desafio)

Enunciado. Em que desaceleração, em g, a normal do eixo traseiro do up! cairia a zero, no modelo rígido do exercício 1.2? Esse ponto é atingível com μ = 0,80?

Conceito. A transferência ΔF_z = m a h / L cresce com a desaceleração. Quando ela iguala a normal estática traseira, o eixo de trás não apoia mais e o carro tombaria sobre o eixo dianteiro. Em um hatch baixo isso exige bem mais do que o atrito do pneu consegue entregar.

Fórmula. `(a)/(g) = (\u2113_f)/(h) = 0,45 (L)/(h)`

De onde vem. F_zt = F_zt0 − m a h / L = 0. Como F_zt0 = 0,45 m g, vem 0,45 g = a h / L, logo a/g = 0,45 L / h. \u2113_f = 0,45 L é a distância do CG ao eixo dianteiro.

Resolução

1. **Desaceleração de levantamento.** a/g = 0,45 × 2,40 / 0,50 = 1,08 / 0,50 = 2,16 g.
2. **Comparar com o atrito.** O teto de atrito é 0,80 g, bem abaixo de 2,16 g. O carro desliza muito antes de o eixo traseiro levantar.

Resposta. O eixo traseiro levantaria a 2,16 g. Com μ = 0,80 o carro desliza muito antes.

Interpretação. Para este hatch o tombamento dianteiro é praticamente inacessível. Ele só se aproximaria se o CG subisse muito (uma carga alta no teto) ou se o entre-eixos encurtasse.

Erro comum a evitar. Usar 0,55 L / h (o levantamento do eixo dianteiro, que ocorreria na aceleração) ou igualar o limite ao próprio μ, sem calcular a geometria.

3.22. Repartição fixa e bloqueio do eixo traseiro (Desafio)

Enunciado. O sistema aplica uma fração fixa β = 0,70 da força de freio no eixo dianteiro (dado de exemplo). Com μ = 0,80, em que desaceleração o eixo traseiro atinge o limite de atrito? E o dianteiro? Qual trava primeiro?

Conceito. Com repartição fixa, as forças de freio não acompanham as normais dinâmicas. O eixo que primeiro atinge μ N é o que trava. Se a traseira trava antes da frente, o carro tende a girar — por isso a curva de repartição real fica um pouco abaixo da ideal, privilegiando a frente.

Fórmula. `(a_t)/(g) = (\u03bc (\u2113_f / L))/((1 \u2212 \u03b2) + \u03bc (h / L))`

De onde vem. Na traseira, (1 − β) m a = μ (F_zt0 − m a h / L). Isolando a/g, com F_zt0 = 0,45 m g, vem a fórmula acima. Na dianteira, β m a = μ (F_zd0 + m a h / L), logo a/g = μ (\u2113_r/L) / (β − μ h/L).

Resolução

1. **Bloqueio traseiro.** a/g = (0,80 × 0,45) / (0,30 + 0,80 × 0,50 / 2,40) = 0,360 / (0,30 + 0,1667) = 0,360 / 0,4667 = 0,771 g.
2. **Bloqueio dianteiro.** a/g = (0,80 × 0,55) / (0,70 − 0,1667) = 0,440 / 0,5333 = 0,825 g.
3. **Quem trava primeiro.** A traseira trava a 0,771 g, antes da frente e um pouco abaixo do teto de 0,80 g. A eficiência é 0,771 / 0,80 = 96,4 %.

Resposta. A traseira trava a 0,771 g e a frente, a 0,825 g. A traseira trava primeiro; a eficiência é 96,4 %.

Interpretação. β = 0,70 está perto da ideal a 0,70 g (69,6 %), mas um pouco baixo para o teto de 0,80 g (ideal ≈ 71,7 %). Por isso a traseira chega primeiro ao limite, ainda que por pouco. Um EBD evitaria esse cruzamento.

Erro comum a evitar. Comparar β só com os 55 % estáticos e concluir que 70 % na frente é sempre seguro, sem calcular o ponto de bloqueio de cada eixo.

3.23. Parada a 120 km/h, piso μ = 0,70 e descida de 3 % (Desafio)

Enunciado. O up! desce uma rampa de 3 % a 120 km/h e freia no limite μ = 0,70 (dados de exemplo). Calcule a desaceleração e a distância só de frenagem, e compare com a mesma frenagem no plano.

Conceito. Aqui se juntam três efeitos que alongam a parada: velocidade alta (s \u221d v²), atrito menor que o seco de 0,80 e uma descida que reduz a. Nenhum dos três é dramático sozinho; juntos, a distância sobe bastante.

Fórmula. `a = g (\u03bc cos \u03b8 \u2212 sen \u03b8) , s =`

De onde vem. É a combinação dos exercícios 3.8 e 3.16. sen θ = 0,03 / \u221a(1 + 0,03²) e cos θ = 1 / \u221a(1 + 0,03²). No plano, a_0 = μ g.

Resolução

1. **Seno, cosseno e desaceleração.** sen θ = 0,02999; cos θ = 0,9996. a = 9,81 × (0,70 × 0,9996 − 0,02999) = 6,57 m/s².
2. **Distância na descida.** v = 120 / 3,6 = 33,33 m/s. s = (33,33)² / (2 × 6,57) = 1 111 / 13,14 = 84,6 m.
3. **No plano.** a_0 = 0,70 × 9,81 = 6,867 m/s². s_0 = 1 111 / 13,73 = 80,9 m. A descida acrescenta 3,7 m.

Resposta. a = 6,57 m/s²; s = 84,6 m na descida, ante 80,9 m no plano.

Interpretação. A rampa de 3 % sozinha acrescenta pouco (3,7 m). O que realmente alonga a parada é ir a 120 km/h com μ = 0,70: no seco e no plano a 80 km/h eram só 31,5 m.

Erro comum a evitar. Usar μ = 0,80 por hábito, ou somar 3 % à distância do plano (83,3 m) em vez de recalcular a.

3.24. Inércia rotacional das rodas (Desafio)

Enunciado. Cada uma das quatro rodas tem momento de inércia J = 0,80 kg\u00b7m² no raio r = 0,29 m (dados de exemplo). Qual é a massa equivalente de translação do up! em uma frenagem, e em quanto isso aumenta a energia a 80 km/h em relação aos 222 kJ do exercício 3.3?

Conceito. Além de parar a translação da massa m, os freios têm de parar a rotação das rodas. Isso se escreve como uma massa extra m_rot = Σ J / r², e a energia total é ½ m_eq v², com m_eq = m + m_rot.

Fórmula. `m_eq = m + , E = (1)/(2) m_eq`

De onde vem. A energia de uma roda é ½ J \u03c9², com \u03c9 = v / r, logo ½ (J / r²) v². Quatro rodas somam 4 J / r² à massa translacional. O modelo ignora o restante da transmissão.

Resolução

1. **Massa rotacional.** m_rot = 4 × 0,80 / (0,29)² = 3,20 / 0,0841 = 38,05 kg.
2. **Massa equivalente e energia.** m_eq = 900 + 38 = 938 kg. E = 222,2 × (938 / 900) = 231,6 kJ, um acréscimo de 9,4 kJ (4,2 %).

Resposta. m_eq = 938 kg; E = 231,6 kJ, ou 9,4 kJ (4,2 %) a mais do que os 222 kJ só de translação.

Interpretação. Quatro por cento não mudam o projeto do disco, mas aparecem no ensaio de coast-down e no consumo. Rodas e pneus mais pesados aumentam exatamente essa parcela.

Erro comum a evitar. Somar 4 × 0,80 = 3,2 kg à massa, esquecendo de dividir por r², ou usar r em milímetros.

3.25. Fade: atrito da pastilha cai (Desafio)

Enunciado. Depois de várias paradas, o μ disponível cai de 0,80 para 0,55 (dado de exemplo). Qual é a nova distância só de frenagem a 80 km/h, e por que fator ela cresce em relação aos 31,5 m do exercício 3.1?

Conceito. O fade é a perda de atrito (pastilha, disco ou pneu) com a temperatura. Como s \u221d 1/μ, qualquer queda de μ alonga a parada na mesma proporção inversa. O motorista ainda pode pisar fundo; o que falta é adesão.

Fórmula. `s = , (s_fade)/(s_0) = (\u03bc_0)/(\u03bc)`

De onde vem. Com v fixo, a razão das distâncias é o inverso da razão dos atritos. μ_0 / μ = 0,80 / 0,55 = 1,455.

Resolução

1. **Nova desaceleração.** a = 0,55 × 9,81 = 5,396 m/s².
2. **Distância e fator.** s = 493,8 / 10,79 = 45,76 m. Razão = 45,76 / 31,46 = 1,45, igual a 0,80 / 0,55.

Resposta. s = 45,8 m, um fator 1,45 em relação aos 31,5 m iniciais.

Interpretação. A parada alonga quase 14 m só pela queda de μ. É o risco de uma descida longa ou de um ensaio repetido sem tempo de esfriar o disco — o ΔT do exercício 3.14 era só a primeira parada.

Erro comum a evitar. Reduzir a distância na mesma proporção de 0,55/0,80 (isso encurtaria a parada, o contrário do fade).

3.26. Curva de repartição ideal (Desafio)

Enunciado. Calcule a fração ideal da força de freio no eixo dianteiro, β_ideal, para o up! parado, a 0,70 g e a 0,80 g. Como essa curva se compara com o β fixo de 0,70 do exercício 3.22?

Conceito. A repartição ideal acompanha a normal dinâmica: β_ideal = F_zd / (m g). Ela começa nos 55 % estáticos e sobe linearmente com a desaceleração, porque a transferência é proporcional a a. Um β fixo só encosta nessa reta em um ponto.

Fórmula. `\u03b2_ideal = (\u2113_r)/(L) + (a)/(g) (h)/(L)`

De onde vem. F_zd = F_zd0 + m a h / L, logo F_zd / (m g) = 0,55 + (a/g)(h/L). Com h/L = 0,50 / 2,40 = 0,2083, a reta sobe 0,208 por cada g de desaceleração.

Resolução

1. **Parado.** β_ideal(0) = 0,55.
2. **A 0,70 g e a 0,80 g.** β(0,70) = 0,55 + 0,70 × 0,2083 = 0,696. β(0,80) = 0,55 + 0,80 × 0,2083 = 0,717.
3. **Comparar com β = 0,70.** O valor fixo de 0,70 atravessa a reta ideal por volta de 0,72 g. Abaixo disso a frente está um pouco superdimensionada; acima, a traseira se aproxima do bloqueio, como no exercício 3.22.

Resposta. β_ideal = 55,0 % parado, 69,6 % a 0,70 g e 71,7 % a 0,80 g. O β fixo de 70 % corta a reta ideal perto de 0,72 g.

Interpretação. Uma curva ideal é uma reta no plano β–a. O EBD tenta seguir essa reta; um proporcional fixo é uma horizontal que só acerta um ponto. A escolha de 70 % é um compromisso razoável para este hatch.

Erro comum a evitar. Deixar β_ideal constante em 55 % ou trocar h/L por L/h, o que daria uma reta absurda (β > 1 já a 0,2 g).

3.27. Eficiência de frenagem com β fixo (Desafio)

Enunciado. Com o β = 0,70 e o bloqueio traseiro a 0,771 g do exercício 3.22, qual é a eficiência de frenagem em relação ao teto μ = 0,80? A 0,50 g, o sistema ainda está longe dos dois limites?

Conceito. A eficiência de frenagem é a razão entre a maior desaceleração que o sistema atinge, antes de algum eixo travar, e o teto μ g. Abaixo do primeiro bloqueio, os dois eixos ainda têm margem, e a eficiência instantânea é simplesmente a/a_teto se você pedir só essa a.

Fórmula. `\u03b7 = (a_m\u00e1x)/(\u03bc g)`

De onde vem. a_máx é o menor dos dois bloqueios do exercício 3.22, 0,771 g. Dividindo por 0,80 g, obtém-se a eficiência no limite. A 0,50 g, compara-se a demanda de cada eixo com a respectiva μ N.

Resolução

1. **Eficiência no limite.** η = 0,771 / 0,80 = 0,964, ou 96,4 %.
2. **Margem a 0,50 g.** A 0,50 g, F = 4 415 N, F_xd = 0,70 × 4 415 = 3 090 N e F_xt = 1 324 N. As normais são F_zd = 4 856 + 919 = 5 775 N e F_zt = 3 973 − 919 = 3 054 N. Os tetos μ N são 4 620 N na frente e 2 443 N atrás: sobram 33 % na frente e 46 % atrás.

Resposta. Eficiência no limite = 96,4 %. A 0,50 g a frente usa 67 % do atrito disponível e a traseira, 54 %: ainda há folga nos dois eixos.

Interpretação. Uma eficiência de 96 % é boa para um proporcional fixo. A 0,50 g ninguém está perto do bloqueio. O problema só aparece quando se pede uma parada de emergência perto de 0,80 g.

Erro comum a evitar. Calcular a eficiência como β / 0,80, ou achar que 96 % significa que a distância de parada é 4 % maior em qualquer desaceleração (isso só vale no teto).

3.28. Blend de regenerativo e fricção (Desafio)

Enunciado. O motorista pede 0,30 g a 80 km/h. O sistema recupera no máximo 30 kW na roda, como no exercício 3.20 (dados de exemplo). Qual força ainda precisa vir do freio de fricção? Que fração do pedido o regenerativo cobre?

Conceito. O blend soma a força de recuperação, limitada pela potência e pela velocidade, com a força das pastilhas, até atingir a desaceleração pedida. Em baixa exigência e baixa velocidade o regenerativo pode cobrir quase tudo; a 80 km/h e 0,30 g, ainda falta uma parcela de fricção.

Fórmula. `F_ped = m a , F_reg = (P)/(v) , F_fric = F_ped \u2212 F_reg`

De onde vem. A força total pedida é m a. A recuperação máxima é P / v. O que faltar sai do circuito hidráulico. Se F_reg > F_ped, a fricção fica zerada e o motor reduz o torque.

Resolução

1. **Força pedida.** a = 0,30 × 9,81 = 2,943 m/s². F_ped = 900 × 2,943 = 2 649 N.
2. **Regenerativo e fricção.** F_reg = 30 000 / 22,22 = 1 350 N (51 % do pedido). F_fric = 2 649 − 1 350 = 1 299 N.

Resposta. F_reg = 1 350 N (51 %); F_fric = 1 299 N. Os dois se dividem quase ao meio neste ponto.

Interpretação. Em uma desaceleração cotidiana de 0,30 g, metade da energia ainda pode voltar para a bateria. Se o pedido subir para 0,80 g, o regenerativo continua limitado a 1 350 N e a fricção assume o resto.

Erro comum a evitar. Somar 30 kW como se fosse força, ou achar que 0,30 g já está todo coberto porque 0,30 g é menor que 0,80 g (a limitação aqui é potência, não atrito).

3.29. Descida longa em velocidade constante (Desafio)

Enunciado. O up! desce 5,0 km de rampa de 8 % a 60 km/h constantes. Os freios (ou o combinado regenerativo + fricção) mantêm a velocidade. Qual é a potência média dissipada e a energia total, descontando rolamento e arrasto?

Conceito. Em descida e velocidade constante, a gravidade entrega potência o tempo todo. Rolamento e arrasto já consomem uma parte; o que sobra precisa ser retirado pelos freios, senão o carro acelera. É o caso típico de aquecimento em serra.

Fórmula. `P = (m g sen \u03b8 \u2212 F_r \u2212 F_a) v , E = P t = F s`

De onde vem. O equilíbrio é F_g − F_r − F_a − F_freio = 0. F_g veio do exercício 1.12 (704,1 N a 8 %). F_r = 105,9 N e F_a = 0,4116 × (16,67)² = 114,3 N, como no exercício 1.6, que tem a mesma velocidade.

Resolução

1. **Força líquida nos freios.** sen θ = 0,08 / \u221a1,0064 = 0,07975. F_g = 704,1 N. F_freio = 704,1 − 105,9 − 114,3 = 483,8 N.
2. **Potência e tempo.** v = 16,67 m/s. P = 483,8 × 16,67 = 8,06 kW. t = 5 000 / 16,67 = 300 s.
3. **Energia.** E = 8,06 kW × 300 s = 2 419 kJ = 0,672 kWh.

Resposta. P = 8,06 kW; E = 2 419 kJ = 0,672 kWh.

Interpretação. Oito quilowatts durante cinco minutos já são um ensaio térmico sério para disco e pastilha. Num elétrico, boa parte poderia ir para a bateria, desde que ela aceite a potência e não esteja cheia no alto da serra.

Erro comum a evitar. Dissipar toda a parcela m g sen θ (704 N, 11,7 kW) sem descontar rolamento e arrasto, que já ajudam a segurar o carro.

3.30. Frenagem em curva no círculo de atrito (Desafio)

Enunciado. O up! está em curva com $a_y = 0{,}40\ g$ e $\mu = 0{,}80$. Qual é a maior desaceleração longitudinal ainda disponível, no modelo do círculo de atrito? Qual é a distância só de frenagem a 80 km/h com essa a_x?

Conceito. O pneu não tem duas reservas independentes de atrito. A parcela já usada na curva reduz o que sobra para frear, segundo $a_x^2 + a_y^2 \le (\mu g)^2$, o mesmo círculo do exercício 1.29. A distância de parada, então, é a de uma a menor do que μg.

Fórmula. `a_x = √((\u03bc g)\u00b2 \u2212 a_y\u00b2) , s =`

De onde vem. Do círculo de Kamm, a_x = \u221a((μ g)² − a_y²). Com a_x conhecido e constante (modelo simples), $s = v^2 / (2\,a_x)$. A 80 km/h, $v = 22{,}22$ m/s.

Resolução

1. **Parcela lateral.** $\mu g = 7{,}848$ m/s². $a_y = 0{,}40 \times 9{,}81 = 3{,}924$ m/s².
2. **O que sobra para frear.** a_x = \u221a(7,848² − 3,924²) = \u221a(61,59 − 15,40) = \u221a46,19 = 6,80 m/s² = 0,693 g.
3. **Distância.** $s = 493{,}8 / (2 \times 6{,}80) = 493{,}8 / 13{,}59 = 36{,}3$ m, ante 31,5 m em reta.

Resposta. $a_x = 6{,}80$ m/s² = 0,693 g; $s = 36{,}3$ m, ante 31,5 m em reta.

Interpretação. Quatro décimos de g na curva comem só cerca de 13 % da capacidade de frenagem (0,80 g para 0,69 g), mas a distância já sobe 5 m. Se a curva for mais apertada, o círculo fecha depressa.

Erro comum a evitar. Subtrair 0,40 g de 0,80 g e usar 0,40 g na parada (s = 62,9 m, o dobro do valor correto). A combinação é pitagórica, não linear.

Sistemas de Suspensão e Direção (28 h)

4.1. Frequência natural do canto dianteiro (Básico)

Enunciado. No modelo de um quarto de veículo, só com a massa suspensa e a mola dianteira, calcule a frequência natural do canto dianteiro do up!, em hertz e em rad/s.

Conceito. A frequência de ride do canto é a de um sistema massa–mola. A massa do canto dianteiro é a metade da parcela suspensa dianteira. Esse valor, perto de 1,2 a 1,6 Hz num passeio, define se o carro fica firme ou macio demais.

Fórmula. $m_{sd} = 0{,}55\, m_s / 2$, $\omega_n = \sqrt{(k_d / m_{sd})}$, $f_n = \omega_n / (2\pi)$

De onde vem. A equação do oscilador livre é $m\ddot{x} + k x = 0$, com $\omega_n = \sqrt{(k/m)}$. A massa suspensa total é $900 - 4 \times 35 = 760$ kg, e 55 % dela está na frente.

Resolução

1. **Massa do canto.** $m_{sd} = 0{,}55 \times 760 / 2 = 209$ kg.
2. **Frequência.** $\omega_n = \sqrt{(20\,000 / 209)} = \sqrt{95{,}69} = 9{,}78$ rad/s. $f_n = 9{,}78 / (2\pi) = 1{,}56$ Hz.

Resposta. $\omega_n = 9{,}78$ rad/s e $f_n = 1{,}56$ Hz.

Interpretação. 1,56 Hz é uma ride típica de um compacto um pouco firme. Abaixo de cerca de 1,2 Hz o carro fica moles; acima de 2 Hz, começa a parecer um utilitário esportivo curto.

Erro comum a evitar. Usar a massa total de 900 kg no canto (daria 1,15 Hz) ou esquecer de dividir o eixo em duas rodas.

4.2. Frequência natural do canto traseiro (Básico)

Enunciado. Repita o cálculo do exercício 4.1 para o canto traseiro, com a mola de 18 kN/m e 45 % da massa suspensa no eixo de trás.

Conceito. O eixo traseiro em geral leva menos massa e, se a mola não for reduzida na mesma proporção, a frequência traseira fica um pouco mais alta que a dianteira. Essa diferença afeta o equilíbrio de arfagem.

Fórmula. $m_{st} = 0{,}45\, m_s / 2$, $f_n = (1)/(2\pi)\ \sqrt{(k_t / m_{st})}$

De onde vem. A mesma fórmula do oscilador livre do exercício 4.1, agora com a parcela traseira e $k_t = 18$ kN/m.

Resolução

1. **Massa do canto.** $m_{st} = 0{,}45 \times 760 / 2 = 171$ kg.
2. **Frequência.** $f_n = (1 / 2\pi)\ \sqrt{(18\,000 / 171)} = (1 / 2\pi)\ \sqrt{105{,}3} = 1{,}63$ Hz.

Resposta. $f_n = 1{,}63$ Hz no canto traseiro, um pouco acima dos 1,56 Hz da frente.

Interpretação. Uma traseira ligeiramente mais rápida que a dianteira ajuda o eixo de trás a acompanhar a frente após um obstáculo, reduzindo o ‘ balanço’ de arfagem. O contrário (traseira mais lenta) deixa o carro mais ‘flutuante’ atrás.

Erro comum a evitar. Usar os mesmos 209 kg do exercício 4.1 no eixo de trás, o que baixaria a frequência para 1,48 Hz e inverteria a conclusão.

4.3. Razão de amortecimento dianteira (Básico)

Enunciado. Com c_d = 1 200 N·s/m no canto dianteiro do exercício 4.1, calcule o amortecimento crítico e a razão de amortecimento ζ.

Conceito. ζ é a fração do amortecimento crítico. Em um passeio, valores perto de 0,2 a 0,4 equilibram conforto e controle: pouco ζ deixa o carro oscilar; ζ demais transmite o piso.

Fórmula. `c_c = 2 √(k_d m_sd) , ζ = c / c_c`

De onde vem. A equação m x¨ + c x˙ + k x = 0 tem amortecimento crítico quando o discriminante se anula, o que dá c_c = 2√(k m). ζ é a razão entre o c real e esse valor.

Resolução

1. **Crítico.** c_c = 2 √(20 000 × 209) = 2 √4,18×10^6 = 2 × 2 045 = 4 089 N·s/m.
2. **Razão.** ζ = 1 200 / 4 089 = 0,293, ou 0,29.

Resposta. c_c = 4 089 N·s/m e ζ = 0,29.

Interpretação. ζ ≈ 0,30 é um alvo clássico de ride. O amortecedor de 1 200 N·s/m, neste canto, está bem dimensionado para esse compromisso.

Erro comum a evitar. Calcular c_c = √(k m) sem o 2, o que dobraria ζ para 0,59 e faria o canto parecer superamortecido.

4.4. Deflexão estática da mola dianteira (Básico)

Enunciado. Qual é a deflexão estática da mola dianteira sob o peso do canto do exercício 4.1?

Conceito. Em estático, o peso do canto comprime a mola até k δ = m g. Essa flecha aparece no projeto do batente, da altura de ride e, como no exercício 4.5, na própria frequência natural.

Fórmula. `δ = m_sd g / k_d`

De onde vem. Equilíbrio vertical: k δ = m g. Isolando δ, vem o peso dividido pela taxa da mola.

Resolução

1. **Calcular.** δ = 209 × 9,81 / 20 000 = 2 050 / 20 000 = 0,1025 m = 102,5 mm.

Resposta. δ = 102,5 mm.

Interpretação. Cerca de 10 cm de flecha estática é coerente com f_n ≈ 1,56 Hz. Uma mola muito mais dura reduziria essa flecha — e subiria a frequência, deixando o carro mais seco.

Erro comum a evitar. Usar a massa de 900 kg na mola de uma só roda, o que daria 441 mm, um curso irreal para um compacto.

4.5. Frequência natural a partir da flecha estática (Básico)

Enunciado. Mostre que f_n = (1 / 2π) √(g / δ) e confira com a flecha de 102,5 mm do exercício 4.4.

Conceito. Como δ = m g / k, a razão k/m é simplesmente g/δ. Por isso, medir a flecha estática já entrega a frequência de ride, sem precisar da massa nem da taxa da mola em separado.

Fórmula. `f_n = (1)/(2π) √(g / δ)`

De onde vem. ω_n² = k/m e k/m = g/δ, porque k δ = m g. Então ω_n = √(g/δ) e f_n = ω_n / 2π.

Resolução

1. **Substituir.** f_n = (1 / 2π) √(9,81 / 0,1025) = (1 / 2π) √95,71 = 1,56 Hz, igual ao exercício 4.1.

Resposta. A fórmula dá 1,56 Hz, conferindo com o exercício 4.1.

Interpretação. É um atalho de bancada: se você mede a flecha, já sabe a ride. Por isso ‘mola mais alta’ e ‘frequência mais baixa’ são a mesma afirmação.

Erro comum a evitar. Esquecer de passar 102,5 mm para 0,1025 m, o que explodiria a raiz, ou usar π no lugar de 2π.

4.6. Força extra da mola em um compressão de 40 mm (Básico)

Enunciado. A partir da posição estática, a mola dianteira comprime mais 40 mm. Qual é a força adicional da mola e a força total no canto?

Conceito. Em torno da posição de ride, o que a mola acrescenta é k vezes o curso extra. A força total é o peso estático mais essa parcela.

Fórmula. `ΔF = k_d Δx , F = m_sd g + ΔF`

De onde vem. A lei de Hooke em torno do equilíbrio. O peso já estava equilibrado pela flecha estática do exercício 4.4.

Resolução

1. **Adicional.** ΔF = 20 000 × 0,040 = 800 N.
2. **Total.** F = 209 × 9,81 + 800 = 2 050 + 800 = 2 850 N.

Resposta. ΔF = 800 N e F_total = 2 850 N.

Interpretação. Quarenta milímetros a mais já pedem 800 N — cerca de 40 % do peso do canto. É por isso que um quebra-molas curto parece ‘duro’, mesmo com uma flecha estática de 10 cm.

Erro comum a evitar. Somar os 40 mm aos 102,5 mm e recalcular k δ com a flecha total como se o peso estático não estivesse pago, ou usar 40 mm como 40 m.

4.7. Rigidez de rolagem das molas (Básico)

Enunciado. Desprezando barras estabilizadoras, calcule a rigidez de rolagem de cada eixo e a total, com a bitola de 1,42 m. A rigidez de um eixo com duas molas de taxa k é $k_\varphi = k\,t^2 / 2$.

Conceito. Quando o carro rola, uma mola comprime e a outra estende. O par forma um momento resistente proporcional a t^2. A barra estabilizadora, se houver, soma a essa parcela.

Fórmula. $k_{\varphi,eixo} = k\,t^2 / 2$, $k_\varphi = k_{\varphi,d} + k_{\varphi,t}$

De onde vem. O deslocamento de cada mola é $(t/2)\,\varphi$. A força é $k\,(t/2)\,\varphi$, e o momento do par é $2 \times k\,(t/2)\,\varphi \times (t/2) = (k\,t^2 / 2)\,\varphi$. Logo $k_{\varphi,eixo} = k\,t^2 / 2$, com k da mola de uma roda.

Resolução

1. **Dianteiro.** $k_{\varphi,d} = 20\,000 \times (1{,}42)^2 / 2 = 20\,000 \times 2{,}0164 / 2 = 20\,164$ N·m/rad.
2. **Traseiro e total.** $k_{\varphi,t} = 18\,000 \times 2{,}0164 / 2 = 18\,148$ N·m/rad. $k_\varphi = 20\,164 + 18\,148 = 38\,312$ N·m/rad.

Resposta. $k_{\varphi,d} = 20\,164$ N·m/rad, $k_{\varphi,t} = 18\,148$ N·m/rad e $k_\varphi = 38\,312$ N·m/rad.

Interpretação. Sem barra estabilizadora, a frente já é um pouco mais rígida em rolagem do que a traseira, só pelas molas e pela bitola comum. Uma barra dianteira acentuaria essa diferença e o subesterço.

Erro comum a evitar. Usar $k_\varphi = k\,t^2$ (sem dividir por 2) ou tratar t em milímetros.

4.8. Ângulo de rolagem a 0,40 g (Básico)

Enunciado. Em uma curva com $a_y = 0{,}40$ g, qual é o ângulo de rolagem da massa suspensa, com o k_φ do exercício 4.7 e o centro de rolagem a 0,10 m?

Conceito. O momento de rolagem é o peso suspenso vezes a aceleração lateral vezes a altura do CG acima do centro de rolagem. A rigidez k_φ converte esse momento em ângulo.

Fórmula. $M_\varphi = m_s\,a_y\,(h - h_r)$, $\varphi = M_\varphi / k_\varphi$

De onde vem. O braço do momento é a distância vertical entre o CG e o eixo de rolagem. Em regime, $M_\varphi = k_\varphi\,\varphi$, desprezando o amortecimento de rolagem (válido em curva constante).

Resolução

1. **Momento.** $a_y = 0{,}40 \times 9{,}81 = 3{,}924$ m/s². $M_\varphi = 760 \times 3{,}924 \times (0{,}50 - 0{,}10) = 1\,193$ N·m.
2. **Ângulo.** $\varphi = 1\,193 / 38\,312 = 0{,}0311$ rad = 1,78°.

Resposta. $\varphi = 0{,}031$ rad = 1,78°.

Interpretação. Menos de 2° a 0,40 g é uma rolagem contida para um compacto baixo. Se o CG subisse ou a barra não existisse e as molas fossem mais macias, esse ângulo cresceria depressa.

Erro comum a evitar. Usar h inteiro (0,50 m) sem descontar o centro de rolagem, o que aumentaria o momento em 25 %, ou deixar φ em radianos e ler como se fosse grau.

4.9. Energia elástica na flecha estática (Básico)

Enunciado. Quanto de energia elástica está armazenada em uma mola dianteira na posição de ride do exercício 4.4?

Conceito. A energia de uma mola linear é (1/2) k δ², ou de forma equivalente (1/2) F δ, com F = k δ. É a reserva que a mola devolve quando o canto é aliviado.

Fórmula. `E = (1)/(2) k_d δ²`

De onde vem. Integração de F dx = k x dx de 0 até δ, o que dá (1/2) k δ².

Resolução

1. **Calcular.** E = 0,5 × 20 000 × (0,1025)² = 10 000 × 0,01051 = 105,1 J.

Resposta. E = 105 J em cada mola dianteira.

Interpretação. São cerca de 100 J por canto — pouco em termos de energia de um carro, mas é exatamente o que devolve o peso do canto quando a roda passa por um buraco e a mola se estende.

Erro comum a evitar. Esquecer o 1/2, o que dobraria a energia, ou usar δ em milímetros dentro de δ² sem converter.

4.10. Ângulo das rodas com a relação de direção (Básico)

Enunciado. A relação de direção é 16:1. Se o motorista gira o volante 90°, qual é o ângulo médio das rodas dianteiras, desprezando o Ackermann?

Conceito. A relação de direção i_dir é o ângulo do volante dividido pelo ângulo médio das rodas. Ela multiplica o curso da mão e reduz o torque que o motorista precisa aplicar.

Fórmula. `δ_roda = δ_volante / i_dir`

De onde vem. Definição da relação de direção, válida no modelo médio (sem distinguir roda interna e externa).

Resolução

1. **Calcular.** δ_roda = 90° / 16 = 5,625° ≈ 5,63°.

Resposta. δ_roda = 5,63°.

Interpretação. 90° no volante, que parece um gesto amplo, mal tira as rodas 6°. Para manobrar em vaga, o volante precisa de várias voltas — daí o interesse de uma direção mais direta, ou de um EPS com relação variável.

Erro comum a evitar. Multiplicar 90° por 16 em vez de dividir, o que daria 1 440°, um ângulo impossível para a roda.

4.11. Frequência de wheel hop (Intermediário)

Enunciado. No mesmo canto dianteiro, a massa não suspensa é 35 kg e o pneu tem rigidez vertical 180 kN/m. Qual é a frequência natural do hop, tratando mola e pneu como duas molas em paralelo vistas pela roda (modelo simples, massa suspensa fixa)?

Conceito. O hop é a oscilação da massa não suspensa entre o piso e a carroceria. Com a carroceria ‘parada’ nesse modelo, a roda sente k_pneu + k_mola. A frequência cai na casa de 10 a 15 Hz, bem acima da ride.

Fórmula. `f_hop = (1)/(2π) √((k_p + k_d) / m_u)`

De onde vem. Se x é o deslocamento da roda e a massa suspensa está fixa, a força restauradora é (k_p + k_d) x. Vale o oscilador livre com essa taxa equivalente e a massa não suspensa.

Resolução

1. **Taxa equivalente.** k = 180 000 + 20 000 = 200 000 N/m.
2. **Frequência.** f_hop = (1 / 2π) √(200 000 / 35) = (1 / 2π) √5 714 = 12,03 Hz.

Resposta. f_hop = 12,0 Hz.

Interpretação. Doze hertz está longe dos 1,56 Hz da ride: os dois modos se separam bem, o que justifica tratar o conforto e o hop em faixas diferentes. Uma roda mais pesada (um conjunto maior) abaixaria o hop e poderia aproximá-lo de ruídos de carroceria.

Erro comum a evitar. Usar só a rigidez do pneu, ou colocar a massa suspensa de 209 kg no lugar da não suspensa, o que derrubaria a frequência para uns 5 Hz e misturaria os modos.

4.12. Transmissibilidade a 10 Hz (Intermediário)

Enunciado. No canto dianteiro dos exercícios 4.1 e 4.3 (f_n = 1,56 Hz, ζ = 0,29), qual é a transmissibilidade de deslocamento para uma excitação harmônica de 10 Hz? Expresse também em decibels.

Conceito. A transmissibilidade T é a razão entre a amplitude da massa e a do piso. Acima da ressonância ela cai, e é isso que isola o conforto nas frequências de roda e de textura do asfalto.

Fórmula. `r = ω / ω_n , T = √(1 + (2 ζ r)²) / √((1 − r²)² + (2 ζ r)²)`

De onde vem. É a solução em regime do oscilador forçado pela base, com r = f / f_n. Em dB, usa-se 20 log10(T).

Resolução

1. **Razão de frequências.** r = 10 / 1,56 = 6,41.
2. **T.** 2 ζ r = 2 × 0,29 × 6,41 = 3,72. Numerador √(1 + 3,72²) = 3,85. Denominador √((1 − 41,09)² + 3,72²) = √(1 607 + 13,8) = 40,3. T = 3,85 / 40,3 = 0,096.
3. **Em dB.** 20 log10(0,096) = −20,3 dB.

Resposta. T = 0,096, ou −20,3 dB.

Interpretação. A 10 Hz, a carroceria já vê só cerca de 10 % do deslocamento do piso. É o isolamento que o passageiro percebe como ‘o asfalto grosseiro não entra inteiro no assento’. No simulador, desça a frequência até f_n e veja o pico.

Erro comum a evitar. Usar r = 10 em vez de 10/1,56, ou calcular 20 ln(T) no lugar de 20 log10(T).

4.13. Ângulos de Ackermann em uma curva de 20 m (Intermediário)

Enunciado. O up! descreve uma curva de raio 20 m ao centro do eixo dianteiro, com L = 2,40 m e bitola 1,42 m. Quais são os ângulos de esterço da roda interna e da externa, no Ackermann puro?

Conceito. No Ackermann, as normais às rodas dianteiras se cruzam no centro da curva, para as quatro rodas rolarem sem deriva em manobra lenta. A roda interna esterça mais do que a externa.

Fórmula. $\delta_i = \arctan(L/(R - t/2))$, $\delta_o = \arctan(L/(R + t/2))$

De onde vem. O raio até a roda interna é R − t/2, e até a externa é R + t/2. Em cada uma, tan δ = L / raio daquela roda.

Resolução

1. **Raios.** t/2 = 0,71 m. $R_i = 20 - 0{,}71 = 19{,}29$ m. $R_o = 20 + 0{,}71 = 20{,}71$ m.
2. **Ângulos.** $\delta_i = \arctan(2{,}40 / 19{,}29) = 7{,}09°$. $\delta_o = \arctan(2{,}40 / 20{,}71) = 6{,}61°$.

Resposta. $\delta_{interna} = 7{,}09°$ e $\delta_{externa} = 6{,}61°$, uma diferença de 0,48°.

Interpretação. A 20 m a diferença já é visível, mas ainda pequena. Em manobra de estacionamento o raio cai e o Ackermann pesa muito mais — é o tema do exercício 4.29.

Erro comum a evitar. Usar o mesmo ângulo nas duas rodas (o valor médio 6,85°) e chamar isso de Ackermann, ou trocar interna e externa.

4.14. Torque no volante com trail de 20 mm (Intermediário)

Enunciado. Uma força lateral de 800 N atua no contato do pneu dianteiro, com trail total (pneumático + mecânico) de 20 mm. Qual é o torque de autoalinhamento nessa roda e, com $i_{dir} = 16$ e duas rodas iguais, o torque no volante, desprezando atrito e assistência?

Conceito. O trail é o braço com que a força lateral do pneu gera o momento de autoalinhamento, que tenta endireitar a roda. Esse momento sobe a coluna até o volante, dividido pela relação de direção.

Fórmula. $\tau_{roda} = F_y \, n$, $\tau_{volante} = 2 \, \tau_{roda} / i_{dir}$

De onde vem. Momento = força × braço, com o trail n em metros. As duas rodas dianteiras contribuem; a relação de direção reduz o torque que chega às mãos (e aumenta o curso, como no 4.10).

Resolução

1. **Por roda.** n = 0,020 m. $\tau_{roda} = 800 \times 0{,}020 = 16{,}0$ N·m.
2. **No volante.** $\tau_{volante} = 2 \times 16{,}0 / 16 = 2{,}00$ N·m.

Resposta. $\tau_{roda} = 16{,}0$ N·m e $\tau_{volante} = 2{,}00$ N·m.

Interpretação. Dois newton-metro no volante é um esforço leve, típico de uma curva suave com assistência desligada ou de um EPS em modo quase transparente. Sem a relação 16:1, as mãos teriam de segurar 32 N·m — inviável em manobra.

Erro comum a evitar. Deixar o trail em milímetros na conta (16 000 N·m) ou esquecer de somar as duas rodas.

4.15. Tempo de acomodação do canto dianteiro (Intermediário)

Enunciado. No canto dianteiro com ζ = 0,29 e ω_n = 9,78 rad/s, estime o tempo para a oscilação livre cair a cerca de 2 % da amplitude inicial (fórmula aproximada t_2% ≈ 4 / (ζ ω_n)).

Conceito. O envelope da oscilação subamortecida cai como e^{−ζω_n t}. O tempo em que esse envelope atinge 2 % é um indicador prático de quanto o carro ‘balança’ depois de um obstáculo.

Fórmula. `t_2% ≈ 4 / (ζ ω_n)`

De onde vem. e^{−ζω_n t} = 0,02 leva ζω_n t = −ln(0,02) ≈ 3,91, arredondado para 4. É uma estimativa de engenharia, não o instante exato de um pico.

Resolução

1. **Calcular.** t_2% ≈ 4 / (0,293 × 9,78) = 4 / 2,87 = 1,40 s.

Resposta. t_2% ≈ 1,40 s.

Interpretação. Depois de um quebra-molas, o canto ainda oscila por cerca de um segundo e meio. Se ζ caísse a 0,15, esse tempo praticamente dobraria — o clássico ‘o carro continua pulando’.

Erro comum a evitar. Usar 4 / ζ sem o ω_n, ou misturar f_n em hertz no lugar de ω_n em rad/s, o que multiplicaria o tempo por 2π.

4.16. Transferência de carga por rolagem a 0,40 g (Intermediário)

Enunciado. Com os dados dos exercícios 4.7 e 4.8, quanto de carga passa da roda interna para a externa no eixo dianteiro, só pela parcela de rolagem (sem a parcela não suspensa nem a do termo m a_y h_r / t)?

Conceito. O momento de rolagem se reparte entre os eixos na proporção das rigidezes de rolagem. Cada eixo converte o seu momento em um par de forças verticais na bitola.

Fórmula. `ΔF_d = (k_φ,d)/(k_φ) (M_φ)/(t)`

De onde vem. A fração dianteira do momento é k_φ,d / k_φ. Esse momento é equilibrado por ΔF × t, logo ΔF = M_eixo / t, já no eixo (as duas rodas compartilham +ΔF e −ΔF).

Resolução

1. **Fração dianteira.** k_φ,d / k_φ = 20 164 / 38 312 = 0,526.
2. **Transferência no eixo.** ΔF_d = 0,526 × 1 193 / 1,42 = 442 N. Por roda, a interna alivia 221 N e a externa ganha 221 N.

Resposta. ΔF_dianteiro = 442 N no eixo, ou 221 N por roda.

Interpretação. São 221 N a mais na externa dianteira, só da rolagem das molas. Uma barra estabilizadora dianteira aumentaria essa parcela e a tendência ao subesterço, porque o pneu da frente interno perderia ainda mais normal.

Erro comum a evitar. Dividir o momento total pela bitola sem a fração k_φ,d / k_φ, atribuindo toda a rolagem ao eixo dianteiro (841 N no eixo).

4.17. Afundamento da dianteira na frenagem, sem anti-dive (Intermediário)

Enunciado. Em uma frenagem a 0,50 g, qual é o afundamento extra de cada mola dianteira se não houver geometria anti-dive, só a transferência de carga sobre as molas do up! (use a massa total 900 kg e k_d = 20 kN/m)?

Conceito. A transferência de carga para a frente comprime as molas dianteiras. A geometria anti-dive gera um componente que contraria esse afundamento; sem ela, o curso é simplesmente ΔF / k por roda.

Fórmula. `ΔF_eixo = m a h / L , δ = (ΔF_eixo / 2) / k_d`

De onde vem. A transferência longitudinal é a mesma do exercício de dinâmica: m a h / L no eixo dianteiro. Metade vai a cada roda, e a flecha extra é força sobre a taxa da mola.

Resolução

1. **Transferência no eixo.** a = 0,50 × 9,81 = 4,905 m/s². ΔF_eixo = 900 × 4,905 × 0,50 / 2,40 = 920 N.
2. **Curso por roda.** ΔF_roda = 460 N. δ = 460 / 20 000 = 0,0230 m = 23,0 mm.

Resposta. δ = 23,0 mm de afundamento por mola dianteira.

Interpretação. São 23 mm a 0,50 g, visíveis no farol e no bico do capô. Um anti-dive de 30 % reduziria isso para cerca de 16 mm, à custa de alguma reação no volante e no conforto.

Erro comum a evitar. Aplicar a transferência inteira em uma só mola, o que dobraria o curso para 46 mm, ou usar só a massa suspensa sem lembrar que a transferência de dinâmica usa a massa total.

4.18. Taxa na roda com razão de movimento 0,90 (Intermediário)

Enunciado. A mola dianteira de 20 kN/m está instalada com razão de movimento i = 0,90 (curso da mola / curso da roda). Qual é a taxa equivalente na roda e a nova frequência natural do canto de 209 kg?

Conceito. A razão de movimento reduz a taxa que a roda ‘vê’: a energia se conserva, e k_roda = k_mola i². Por isso uma mola instalada mais ‘em pé’ ou mais longe do cubo muda a ride sem trocar a peça.

Fórmula. `k_roda = k_d i² , f_n = (1)/(2π) √(k_roda / m_sd)`

De onde vem. Se x_mola = i x_roda, a força na roda é i vezes a força na mola, e F_roda = k_mola i² x_roda. A frequência usa essa taxa equivalente e a massa do canto.

Resolução

1. **Taxa na roda.** k_roda = 20 000 × (0,90)² = 20 000 × 0,81 = 16 200 N/m.
2. **Frequência.** f_n = (1 / 2π) √(16 200 / 209) = 1,40 Hz, ante 1,56 Hz com i = 1.

Resposta. k_roda = 16,2 kN/m e f_n = 1,40 Hz.

Interpretação. Cair de 1,56 Hz para 1,40 Hz é um passo inteiro de conforto, só com a instalação da mola. Por isso o gráfico de razão de movimento ao longo do curso também muda a ride em bump e em rebound.

Erro comum a evitar. Usar k_roda = k i, sem o quadrado, o que daria 18 kN/m e 1,48 Hz — um erro comum e nada desprezível.

4.19. Camber de rolagem (Intermediário)

Enunciado. A suspensão dianteira tem ganho de camber de rolagem de 0,80° por grau de rolagem da carroceria (dado de exemplo). Com os 1,78° do exercício 4.8, qual é o camber extra na roda externa?

Conceito. Quando a carroceria rola, o conjunto de suspensão leva a roda com ela, em geral aumentando o camber negativo na externa (ou reduzindo o positivo). Esse ganho é um dado da cinemática, em °/°.

Fórmula. $\Delta\gamma = \varepsilon_{\gamma\varphi} \cdot \varphi$

De onde vem. Definição do ganho cinemático de camber de rolagem, para pequenos ângulos, com φ em graus.

Resolução

1. **Calcular.** Δγ = 0,80 × 1,78 = 1,42°.

Resposta. Δγ = 1,42° na roda externa.

Interpretação. Um grau e meio de camber extra ajuda o pneu externo a trabalhar mais de pé na curva, se o ganho for no sentido ‘negativo na externa’. Ganho demais desgasta o ombro em linha reta e piora o alinhamento.

Erro comum a evitar. Somar 0,80° com 1,78° em vez de multiplicar, ou aplicar o ganho sobre φ em radianos (0,031), o que daria quase zero.

4.20. Gradiente de subesterço pelo peso e pelas rigidezes (Intermediário)

Enunciado. Admita rigidez de deriva C_f = C_r = 40 kN/rad em cada eixo do up! (dado de exemplo). Calcule o gradiente de subesterço de bicycle model K_us = W_f / C_f − W_r / C_r, em °/g.

Conceito. Se as rigidezes de deriva são iguais e a frente leva mais peso, o carro é levemente subesterçante: precisa de um pouco mais de esterço do que o Ackermann cinemático quando a_y cresce.

Fórmula. $K_{us} = W_f / C_f - W_r / C_r$

De onde vem. É o termo clássico do bicycle model em regime, com W_f e W_r os pesos por eixo e C em N/rad. W/C já é um ângulo, e o peso corresponde a uma força de 1 g, então K_us sai em rad/g; multiplica-se por 180/π para obter °/g.

Resolução

1. **Pesos.** W_f = 0,55 × 900 × 9,81 = 4 856 N. W_r = 0,45 × 900 × 9,81 = 3 973 N.
2. **Gradiente.** K_us = 4 856 / 40 000 − 3 973 / 40 000 = 0,1214 − 0,0993 = 0,0221 rad/g = 1,26 °/g.

Resposta. K_us = 0,0221 rad/g = 1,26 °/g, levemente subesterçante.

Interpretação. Com C iguais, só a repartição 55/45 já dá um subesterço pequeno e estável. Se o eixo traseiro perder aderência (C_r menor), K_us pode zerar ou virar negativo — o sobresterço, como no exercício 4.28.

Erro comum a evitar. Dividir W/C por g outra vez e ler 0,00225 rad/g = 0,129 °/g, cerca de dez vezes menor, ou inverter frente e traseira na fórmula.

4.21. Modos de bounce e pitch do veículo inteiro (Desafio)

Enunciado. Com massa suspensa 760 kg, repartição 55/45, entre-eixos 2,40 m, molas 20 e 18 kN/m por roda e raio de giração de arfagem k_y = 1,10 m, calcule as frequências dos dois modos bounce–pitch e identifique qual é predominantemente bounce.

Conceito. O movimento vertical do CG e a arfagem estão acoplados, a menos que a correlação de massa $k_y^2 = a\,b$. As duas frequências saem de um determinante 2×2; o modo de menor frequência costuma ser o bounce.

Fórmula. $(K11 - m_s\,\omega^2)(K22 - I_y\,\omega^2) - K12^2 = 0$

De onde vem. $K11 = 2\,k_d + 2\,k_t$ é a taxa de bounce, $K22 = 2\,k_d\,a^2 + 2\,k_t\,b^2$ a de pitch e $K12 = -2\,k_d\,a + 2\,k_t\,b$ o acoplamento, com a a distância do CG ao eixo dianteiro e b ao traseiro. $I_y = m_s\,k_y^2$.

Resolução

1. **Geometria e inércia.** b = 0,55 × 2,40 = 1,32 m (CG ao eixo traseiro). a = 1,08 m. $I_y = 760 \times 1{,}10^2 = 919{,}6$ kg·m².
2. **Matriz de rigidez.** K11 = 76 000 N/m. $K12 = -2\times20\,000\times1{,}08 + 2\times18\,000\times1{,}32 = 4\,320$ N/rad. $K22 = 2\times20\,000\times1{,}08^2 + 2\times18\,000\times1{,}32^2 = 109\,382$ N·m/rad.
3. **Raízes.** A equação em $\lambda = \omega^2$ tem raízes 98,68 e 120,3. Frequências: 1,58 Hz e 1,75 Hz.
4. **Forma modal.** No modo 1,58 Hz, $\theta/z \approx -0{,}23$ rad/m: quase bounce puro. No de 1,75 Hz, $\theta/z \approx 3{,}56$ rad/m: predominantemente pitch.

Resposta. f_{bounce} = 1,58 Hz e f_{pitch} = 1,75 Hz. O modo de 1,58 Hz é predominantemente bounce ($\theta/z \approx -0{,}23$ rad/m).

Interpretação. As duas frequências estão próximas, típico de um hatch compacto. Como $k_y^2 = 1{,}21$ e a b = 1,43, o acoplamento é moderado: o ‘bounce’ ainda mexe um pouco o nariz, e o pitch ainda tem um pouco de heave.

Erro comum a evitar. Calcular bounce e pitch como se fossem desacoplados, $\sqrt{(K11/m)}/2\pi = 1{,}59$ Hz e $\sqrt{(K22/I_y)}/2\pi = 1{,}74$ Hz. Aqui o erro é pequeno, mas cresce quando k_y^2 se afasta de a b.

4.22. Energia dissipada pelos amortecedores em 10 s (Desafio)

Enunciado. O up! passa 10 s sobre um piso que impõe a cada roda um movimento senoidal de 20 mm de amplitude a 2,0 Hz, na vertical. Qual é a potência média total dos quatro amortecedores (1 200 N·s/m na frente e 1 000 N·s/m atrás) e a energia dissipada nesse intervalo?

Conceito. Em um amortecedor viscoso, a potência instantânea é $c\,v^2$. Em um ciclo senoidal a média vale $(1/2)\,c\,(A\,\omega)^2$, porque o valor eficaz de um cosseno é $A\omega/\sqrt{2}$.

Fórmula. $P_{méd} = (1/2)\,c\,(A\,\omega)^2$, $E = P_{méd}\,t$

De onde vem. $v = A\,\omega\cos(\omega\,t)$, então a média de v^2 em um período é $(A\,\omega)^2 / 2$. Multiplica-se por c e soma-se os quatro cantos, admitindo o mesmo curso em cada roda (piso uniforme).

Resolução

1. **Velocidade de pico.** $\omega = 2\pi \times 2{,}0 = 12{,}57$ rad/s. $A\,\omega = 0{,}020 \times 12{,}57 = 0{,}251$ m/s. $(A\,\omega)^2 / 2 = 0{,}0316$ m²/s².
2. **Potência.** Dois dianteiros: $2 \times 1\,200 \times 0{,}0316 = 75{,}8$ W. Dois traseiros: $2 \times 1\,000 \times 0{,}0316 = 63{,}2$ W. Total 139 W.
3. **Energia em 10 s.** $E = 139 \times 10 = 1{,}39$ kJ.

Resposta. $P_{méd} = 139$ W no total dos quatro amortecedores; $E = 1{,}39$ kJ em 10 s.

Interpretação. Quase 140 W de calor nos amortecedores, da ordem de uma lâmpada incandescente, já em um piso só de 20 mm a 2 Hz. Em estrada ruim isso sobe com o quadrado da amplitude e da frequência, e o óleo aquece.

Erro comum a evitar. Usar $P = c\,A\,\omega$, que não é potência, ou esquecer de somar os quatro cantos, ou tomar a amplitude de pico como valor eficaz sem dividir por $\sqrt{2}$ no v^2.

4.23. Mola e pneu em série, nova ride (Desafio)

Enunciado. A mola dianteira de 20 kN/m está em série com o pneu de $k_p = 180$ kN/m. Qual é a taxa equivalente sentida pela massa suspensa do canto (209 kg) e a nova frequência de ride, se o pneu for considerado sem massa?

Conceito. Duas molas em série se combinam por inversos: a mais mole domina. O pneu é bem mais rígido, então a correção é pequena, mas medeável, e importa quando se compara cálculo com um ensaio de pneu cheio versus no cavalete.

Fórmula. $k_{eq} = (k_d\,k_p)/(k_d + k_p)$, $f_n = (1)/(2\pi)\,\sqrt{(k_{eq} / m_{sd})}$

De onde vem. A força é a mesma nas duas molas e os cursos se somam: $1/k_{eq} = 1/k_d + 1/k_p$. A frequência usa essa taxa e a massa do canto, no modelo de 1 grau de liberdade (pneu sem massa).

Resolução

1. **Série.** $k_{eq} = (20\,000 \times 180\,000) / 200\,000 = 18\,000$ N/m.
2. **Frequência.** $f_n = (1 / 2\pi)\,\sqrt{(18\,000 / 209)} = 1{,}48$ Hz, ante 1,56 Hz com a mola só.

Resposta. $k_{eq} = 18{,}0$ kN/m e $f_n = 1{,}48$ Hz.

Interpretação. São 0,08 Hz a menos só por incluir o pneu. Em um pneu mais murcho (k_p menor) a ride cai mais, e o hop da massa não suspensa também muda — o modelo de 1 GDL começa a ficar curto.

Erro comum a evitar. Somar as taxas (200 kN/m), como se fossem molas em paralelo, o que explodiria a frequência para cerca de 4,9 Hz.

4.24. Pico de transmissibilidade no canto dianteiro (Desafio)

Enunciado. Para o canto dianteiro do exercício 4.3 ($f_n = 1{,}56$ Hz, $\zeta = 0{,}29$), calcule o pico da transmissibilidade de deslocamento $T = X/Y$ de um piso senoidal e a frequência em que ele ocorre.

Conceito. A transmissibilidade de base diz quanto o piso ‘sobe’ para a carroceria. O pico fica um pouco abaixo da frequência natural e cai quando o amortecimento sobe; depois de $\sqrt{2}\, f_n$ o amortecedor passa a prejudicar o isolamento.

Fórmula. $T(r) = \sqrt{\left(1 - r^2\right)^2 + \left(2\zeta r\right)^2}$ />

De onde vem. É a razão $|X/Y|$ da massa suspensa para um deslocamento de base Y senoidal, no modelo de 1 GDL com amortecedor ligado ao solo (o esquema clássico de ride). $r = f / f_n$.

Resolução

1. **Varredura.** Com $\zeta = 0{,}293$, o máximo de $T(r)$ cai em $r = 0{,}933$, ou $f = 0{,}933 \times 1{,}56 = 1{,}45$ Hz.
2. **Valor do pico.** $T_{pico} = 2{,}03$. (A aproximação de força $1 / (2\zeta\sqrt{1 - \zeta^2})$ daria 1,78, que é outro envelope, o da amplificação $X / \delta_{estática}$.)

Resposta. $T_{pico} = 2{,}03$ na frequência 1,45 Hz.

Interpretação. A carroceria sobe o dobro do piso na ressonância de ride. Por isso um buraco longo e regular a cerca de 1,5 Hz (calçamento largo em baixa velocidade, por exemplo) é tão desconfortável. Acima de cerca de 2,2 Hz o isolamento começa a melhorar.

Erro comum a evitar. Avaliar T só em $r = 1$, onde $T = \sqrt{1 + 4\zeta^2} / (2\zeta) \approx 1{,}99$, perto do pico mas não no pico, ou usar $1/(2\zeta) = 1{,}72$, que ignora o numerador da transmissibilidade de base.

4.25. Ackermann de manobra em um raio de 5 m (Desafio)

Enunciado. Em uma vaga com raio no centro do eixo traseiro $R = 5{,}0$ m, quais são os esterços interno e externo do up! ($L = 2{,}40$ m, $t = 1{,}42$ m) na geometria de Ackermann, e qual é a diferença entre eles?

Conceito. Em manobra fechada o arco interno é bem menor que o externo, e a diferença de esterço cresce. É nesse regime, não a 80 km/h, que um erro de Ackermann faz o pneu interno arrastar no asfalto da vaga.

Fórmula. $\delta_i = \operatorname{arctg}\, (L)/(R - t/2)\ ,\ \delta_o = \operatorname{arctg}\, (L)/(R + t/2)$

De onde vem. Os dois raios medidos no chão até cada roda dianteira diferem de meia bitola, se o centro instantâneo estiver no prolongamento do eixo traseiro (Ackermann clássico).

Resolução

1. **Interno.** $\delta_i = \operatorname{arctg}(2{,}40 / (5{,}00 - 0{,}71)) = \operatorname{arctg}(0{,}559) = 29{,}2°$.
2. **Externo.** $\delta_o = \operatorname{arctg}(2{,}40 / (5{,}00 + 0{,}71)) = \operatorname{arctg}(0{,}420) = 22{,}8°$.
3. **Diferença.** $\Delta\delta = 29{,}2 - 22{,}8 = 6{,}4°$.

Resposta. $\delta_{interno} = 29{,}2°$, $\delta_{externo} = 22{,}8°$, diferença de 6,4°.

Interpretação. Seis graus de diferença em uma vaga apertada: o trapézio de direção precisa acompanhar isso, senão um dos pneus derrapa em baixo atrito e a direção fica pesada no estacionamento.

Erro comum a evitar. Usar a aproximação $\delta \approx L/R$ em radianos para as duas rodas (27,5°) e concluir que não há diferença, o que só vale em raio grande.

4.26. Projetar a mola dianteira para 1,40 Hz (Desafio)

Enunciado. Qual deve ser a taxa da mola dianteira, já na roda, para que o canto de 209 kg tenha frequência natural de 1,40 Hz? Se a razão de movimento for i = 0,90, qual taxa deve ter a mola instalada?

Conceito. A frequência natural fixa a taxa na roda. Depois a razão de movimento devolve a taxa da peça: a mola precisa ser mais dura que a taxa na roda, porque k_roda = k_mola i².

Fórmula. `k_roda = m_sd (2π f_n)² , k_mola = k_roda / i²`

De onde vem. Inverte-se f_n = (1 / 2π) √(k / m). A energia da mola, com x_mola = i x_roda, impõe o i² no caminho inverso.

Resolução

1. **Taxa na roda.** k_roda = 209 × (2π × 1,40)² = 209 × 77,38 = 16,17 kN/m.
2. **Taxa da mola.** k_mola = 16,17 / 0,90² = 16,17 / 0,81 = 20,0 kN/m.

Resposta. k_roda = 16,17 kN/m; com i = 0,90, a mola instalada deve ter 20,0 kN/m.

Interpretação. É o caminho inverso do exercício 4.18: a mola de 20 kN/m com i = 0,90 devolve exatamente a ride de 1,40 Hz no canto de 209 kg. Mudar i no meio do curso muda a ride em bump sem trocar a peça.

Erro comum a evitar. Dividir por i em vez de i², o que pediria uma mola de 18,0 kN/m e deixaria a ride em 1,33 Hz, mais mole do que o alvo.

4.27. Barra estabilizadora para limitar a rolagem a 1,20° (Desafio)

Enunciado. Com o momento de rolagem de 1 193 N·m do exercício 4.8, qual rigidez de rolagem total é necessária para limitar φ a 1,20°? Quanto precisa acrescentar uma barra estabilizadora dianteira, e qual é a taxa equivalente dessa barra em cada roda dianteira?

Conceito. A barra não altera a ride em bounce puro (os dois lados sobem juntos), mas entra no roll. É o jeito clássico de endurecer a rolagem sem endurecer demais o conforto em linha reta.

Fórmula. `k_φ,nec = M_φ / φ , k_w,barra = 2 Δk_φ / t²`

De onde vem. φ em radianos. A taxa equivalente na roda vem da mesma relação do exercício 4.7, invertida: k_φ = k_w t² / 2, agora só para o acréscimo da barra.

Resolução

1. **Alvo.** φ = 1,20° = 0,02094 rad. k_φ,nec = 1 193 / 0,02094 = 56 962 N·m/rad.
2. **Acréscimo.** k_φ atual = 38 312 N·m/rad. Δk_φ = 18 650 N·m/rad a cargo da barra dianteira.
3. **Taxa na roda.** k_w,barra = 2 × 18 650 / 1,42² = 18,50 kN/m em cada roda dianteira.

Resposta. k_φ,nec = 56 962 N·m/rad; a barra dianteira deve acrescentar 18 650 N·m/rad, ou 18,50 kN/m equivalentes em cada roda.

Interpretação. A rolagem cai de 1,78° para 1,20°, mas a frente fica proporcionalmente mais rígida em roll, o que aumenta o subesterço (mais transferência de carga no eixo dianteiro, como no exercício 4.16).

Erro comum a evitar. Deixar φ em graus na divisão M/φ, o que inflaria a rigidez para cerca de 994 N·m/grau interpretados como N·m/rad, um fator de 180/π.

4.28. Velocidade crítica se o eixo traseiro perder aderência (Desafio)

Enunciado. Com C_f = 40 kN/rad e a repartição 55/45 do up!, o eixo traseiro cai para C_r = 25 kN/rad (pneu traseiro frio ou mais murcho, dado de exemplo). Calcule o gradiente de subesterço em °/g e a velocidade crítica correspondente.

Conceito. Se K_us fica negativo, o carro é sobresterçante e existe uma velocidade crítica em que o esterço necessário para um raio finito cai a zero: o veículo instabiliza sozinho.

Fórmula. `K_us = W_f / C_f − W_r / C_r , v_crít = √(g L / |K_us|)`

De onde vem. K_us sai em rad/g, porque W/C é um ângulo e o peso já corresponde a uma força de 1 g. No bicycle model, δ = (L + K_us v² / g) / R; o termo entre parênteses zera quando v² = −g L / K_us.

Resolução

1. **Pesos.** W_f = 4 856 N, W_r = 3 973 N, como no exercício 4.20.
2. **Gradiente.** K_us = 4 856 / 40 000 − 3 973 / 25 000 = 0,1214 − 0,1589 = −0,0375 rad/g = −2,15 °/g.
3. **Velocidade crítica.** v_crít = √(9,81 × 2,40 / 0,0375) = 25,0 m/s = 90 km/h.

Resposta. K_us = −0,0375 rad/g = −2,15 °/g; v_crít = 25,0 m/s = 90 km/h.

Interpretação. Um eixo traseiro mais murcho já instabiliza o up! por volta de 90 km/h. Por isso a pressão traseira e a temperatura dos pneus de um eixo livre importam tanto quanto a geometria da suspensão.

Erro comum a evitar. Dividir W/C por g de novo e usar K_us = −0,0038 rad/g na fórmula da v_crít, o que inflaria a velocidade crítica para cerca de 79 m/s (284 km/h), irreal neste caso.

4.29. Bump steer no afundamento de uma frenagem (Desafio)

Enunciado. A suspensão dianteira tem bump steer de 0,50° de toe-out a cada 50 mm de compressão (dado de exemplo, aproximadamente linear). Com os 23,0 mm de afundamento do exercício 4.17, a 0,50 g, quanto de esterço espúrio aparece em cada roda dianteira?

Conceito. Bump steer é a variação de toe com o curso. Em frenagem os dois lados afundam juntos, então um toe-out simétrico abre as rodas e deixa o carro mais vago ou puxa se os cursos não forem iguais.

Fórmula. `δ_bump = ε_δz · (δ_curso / z_ref)`

De onde vem. Interpolação linear do ganho cinemático dado, com o curso de afundamento do exercício 4.17.

Resolução

1. **Proporção.** δ_bump = 0,50° × (23,0 / 50) = 0,23° de toe-out em cada roda.
2. **Nas duas rodas.** A abertura total entre as dianteiras é 0,46°. Não é esterço de direção (os dois lados se abrem), é uma mudança de alinhamento em frenagem.

Resposta. 0,23° de toe-out em cada roda dianteira, ou 0,46° de abertura total.

Interpretação. Quase um quarto de grau por lado já se sente no alinhamento: o carro ‘abre’ o eixo dianteiro no mergulho e pode ficar menos estável em reta, ou puxar se um lado afundar mais (piso irregular, um só disco mais forte).

Erro comum a evitar. Tratar os 0,23° como esterço de Ackermann em uma só roda, ou aplicar o ganho de 0,50° inteiro sem proporcionalizar pelo curso de 23 mm.

4.30. Curso combinado de heave e rolagem na roda externa (Desafio)

Enunciado. O up! passa por um piso que comprime os dois eixos em 20 mm de heave e, ao mesmo tempo, rola 1,78° como no exercício 4.8 (bitola 1,42 m). Qual é o curso na roda externa e na interna, e o que isso diz sobre o espaço de suspensão?

Conceito. Heave e roll se somam no curso da roda: a externa entra em compressão pelos dois efeitos, a interna pode até ir a rebound. O batente e a mola precisam cobrir essa soma, não só cada evento isolado.

Fórmula. `z_ext = z_heave + (t / 2) φ , z_int = z_heave − (t / 2) φ`

De onde vem. A rolagem φ (em radianos) levanta um lado e abaixa o outro em (t/2) φ, no chassi em relação ao eixo. Soma-se o heave comum dos dois lados.

Resolução

1. **Parcela de rolagem.** φ = 1,78° = 0,0311 rad. (t/2) φ = 0,71 × 0,0311 = 22,1 mm.
2. **Cursos.** z_ext = 20 + 22,1 = 42,1 mm (compressão). z_int = 20 − 22,1 = −2,1 mm (quase no estático, levemente em rebound).

Resposta. Roda externa em 42,1 mm de compressão; interna em −2,1 mm (leve rebound).

Interpretação. O buraco mais a curva já pedem mais de 40 mm na externa, o dobro do heave sozinho. Se o curso útil até o batente for de 60 mm, ainda há folga; se for de 35 mm, a externa bate no bump stop e a rolagem fica não linear de repente.

Erro comum a evitar. Somar 20 mm com 1,78° sem converter a rolagem em curso, ou usar t φ em vez de (t/2) φ, o que dobraria a parcela de rolagem para 44 mm.

Sistemas de Propulsão ICE e Transmissões xHEV (20 h)

5.1. Potência no motor a 100 km/h, em velocidade constante (Básico)

Enunciado. O up! roda a 100 km/h em reta e no plano, em velocidade constante. Qual é a potência nas rodas e, com η = 0,92, a potência que o motor de combustão precisa entregar no volante?

Conceito. Em velocidade constante a tração equilibra as resistências. A potência nas rodas é F v; a do motor é maior, porque a transmissão dissipa a fração 1 − η.

Fórmula. `P_roda = (F_r + F_a) v , P_motor = P_roda / η`

De onde vem. F_r = C_r m g e F_a = (1/2) ρ C_d A v², como no exercício 1.1. O rendimento liga as duas potências por P_roda = η P_motor, em regime e na marcha engatada.

Resolução

1. **Velocidade e resistências.** v = 100 / 3,6 = 27,78 m/s. F_r = 105,9 N. F_a = 0,4116 × (27,78)² = 317,6 N. F = 423,5 N.
2. **Potências.** P_roda = 423,5 × 27,78 = 11,77 kW. P_motor = 11,77 / 0,92 = 12,79 kW.

Resposta. P_roda = 11,77 kW e P_motor = 12,79 kW.

Interpretação. Só 12,8 kW no motor já mantêm 100 km/h no plano — uma fração da potência máxima de 60 kW. O resto da reserva existe para acelerar, vencer rampa e vento. Os 8 % da transmissão são 1,0 kW de calor na caixa e no diferencial.

Erro comum a evitar. Esquecer de dividir por η e dar só os 11,77 kW das rodas como se fossem o pedido do motor, ou converter mal 100 km/h e usar v = 100 m/s, o que inflaria a potência cerca de 13 vezes.

5.2. Torque do motor em 5ª a 80 km/h (Básico)

Enunciado. Em 5ª marcha ($i = 0{,}85$ e $i_0 = 4{,}20$), a 80 km/h constantes no plano, qual é o torque nas rodas e o torque que o motor precisa entregar, com $\eta = 0{,}92$?

Conceito. O torque nas rodas é a força de tração vezes o raio. Entre o motor e a roda, o produto das relações multiplica o torque e o rendimento tira uma parte.

Fórmula. $\tau_{roda} = F\, r$, $\tau_{motor} = \tau_{roda} / (i\, i_0\, \eta)$

De onde vem. F vem das resistências, como no 5.1. A transmissão ideial daria $\tau_{roda} = \tau_{motor}\, i\, i_0$; com perdas, $\tau_{roda} = \tau_{motor}\, i\, i_0\, \eta$, e inverte-se essa relação.

Resolução

1. **Força e torque na roda.** $v = 80 / 3{,}6 = 22{,}22$ m/s. $F = 105{,}9 + 0{,}4116 \times (22{,}22)^2 = 309{,}2$ N. $\tau_{roda} = 309{,}2 \times 0{,}29 = 89{,}7$ N·m.
2. **Torque no motor.** $i\, i_0 = 0{,}85 \times 4{,}20 = 3{,}57$. $\tau_{motor} = 89{,}7 / (3{,}57 \times 0{,}92) = 27{,}3$ N·m.

Resposta. $\tau_{roda} = 89{,}7$ N·m e $\tau_{motor} = 27{,}3$ N·m.

Interpretação. São só 27 N·m num motor de 110 N·m de pico: o up! cruza a 80 km/h em carga parcial, bem abaixo do torque máximo. É o regime em que o consumo específico costuma não ser o melhor, daí o interesse de um híbrido em deslocar o ponto de carga.

Erro comum a evitar. Esquecer o rendimento e obter 25,1 N·m, ou aplicar $i\, i_0$ só no torque da roda como se fosse para multiplicar, invertendo o caminho e chegando a centenas de N·m no motor.

5.3. Rotação do motor em 5ª a 80 km/h (Básico)

Enunciado. Com os mesmos dados do exercício 5.2, qual é a rotação das rodas e a rotação do motor em 5ª a 80 km/h?

Conceito. A velocidade tangencial da roda é $v = \omega\, r$. A transmissão multiplica a rotação no caminho inverso do torque: o motor gira $i\, i_0$ vezes mais rápido que a roda.

Fórmula. $\omega_{roda} = v / r$, $n_{motor} = n_{roda} \cdot i \cdot i_0$

De onde vem. O rendimento não entra na cinemática, só na força. n em rpm sai de ω em rad/s por $n = \omega \times 60 / (2\pi)$.

Resolução

1. **Roda.** $\omega_{roda} = 22{,}22 / 0{,}29 = 76{,}6$ rad/s. $n_{roda} = 76{,}6 \times 60 / (2\pi) = 732$ rpm.
2. **Motor.** $n_{motor} = 732 \times 3{,}57 = 2\,612$ rpm.

Resposta. $n_{roda} = 732$ rpm e $n_{motor} = 2\,612$ rpm.

Interpretação. A 80 km/h o motor está numa faixa útil, perto de 2 600 rpm. Se a 5ª fosse bem mais longa, a rotação cairia para a zona de baixo torque e de pouca reserva para uma ultrapassagem.

Erro comum a evitar. Multiplicar a rotação da roda por η, ou usar v em km/h no $\omega = v / r$, o que daria uma rotação cerca de 3,6 vezes maior.

5.4. Força trativa em 1ª com torque máximo (Básico)

Enunciado. Com $T_{motor} = 110$ N·m, 1ª marcha ($i = 3{,}60$), $i_0 = 4{,}20$ e $\eta = 0{,}92$, qual é a força trativa nas rodas?

Conceito. Na arrancada o que importa é a força no contato do pneu. A transmissão multiplica o torque do motor e o raio converte esse torque em força; o rendimento reduz um pouco o valor ideal.

Fórmula. $F_t = \tau_{motor}\, i\, i_0\, \eta / r$

De onde vem. Inverte-se $\tau_{roda} = F_t\, r$ e usa-se $\tau_{roda} = \tau_{motor}\, i\, i_0\, \eta$, já com as perdas da transmissão no fluxo de potência para a roda.

Resolução

1. **Relação total.** $i\, i_0 = 3{,}60 \times 4{,}20 = 15{,}12$.
2. **Força.** $F_t = 110 \times 15{,}12 \times 0{,}92 / 0{,}29 = 5\,276$ N.

Resposta. $F_t = 5\,276$ N.

Interpretação. Mais de 5 kN na arrancada, da ordem de 0,60 vezes o peso do up!. Ainda está abaixo do teto de atrito $\mu\, m\, g = 7\,063$ N, então o limite aqui é o motor, não o pneu.

Erro comum a evitar. Esquecer o raio (dar 1 530 N·m e chamá-los de força) ou omitir η, o que elevaria a tração para 5 735 N.

5.5. Maior rampa vencível em 1ª, em regime (Básico)

Enunciado. Com a força trativa do exercício 5.4 e desprezando o arrasto (partida em baixa velocidade), qual é a maior inclinação que o up! vence em 1ª, em velocidade constante? Dê a rampa em % e o ângulo.

Conceito. Na rampa, além do rolamento, aparece a componente do peso $m\, g \operatorname{sen}\theta$. Em velocidade constante essa parcela mais o rolamento equivalem à tração disponível.

Fórmula. $\operatorname{sen}\theta = (F_t - F_r) / (m\, g)$, $i = \tan\theta$

De onde vem. O equilíbrio é $F_t = C_r\, m\, g \cos\theta + m\, g \operatorname{sen}\theta$. Em rampas até cerca de 20 % o $\cos\theta \approx 1$ é aceitável; aqui a rampa é íngreme, mas o enunciado pede o modelo simples com $F_r = C_r\, m\, g$ e $\operatorname{sen}\theta = (F_t - F_r)/(m\, g)$. A rampa em % é $100 \tan\theta$.

Resolução

1. **Seno.** $F_r = 105{,}9$ N. $\operatorname{sen}\theta = (5\,276 - 105{,}9) / (900 \times 9{,}81) = 5\,170 / 8\,829 = 0{,}5856$.
2. **Ângulo e rampa.** $\theta = \arcsen(0{,}5856) = 35{,}8°$. $i = \tan(35{,}8°) = 0{,}722$, ou 72 %.

Resposta. $\operatorname{sen}\theta = 0{,}586$, $\theta = 35{,}8°$ e rampa de 72 %.

Interpretação. 72 % é uma rampa extrema (um piso de garagem íngreme anda na casa de 20 a 30 %). O número mostra que a 1ª tem reserva grande de tração em baixa velocidade; o que costuma limitar na prática é o atrito, o resfriamento ou o conforto da embreagem, não a conta de equilíbrio.

Erro comum a evitar. Confundir $\operatorname{sen}\theta$ com a rampa em % e responder 58,6 %, ou usar $\tan\theta = (F_t - F_r)/(m\, g)$ sem passar pelo arco-seno, o que daria 51 % neste caso.

5.6. Consumo a 100 km/h com BSFC de 250 g/kWh (Básico)

Enunciado. Com a potência no motor do exercício 5.1 (12,79 kW) e um consumo específico de 250 g/kWh, calcule o consumo em L/h e em L/100 km. Use densidade da gasolina 0,75 kg/L.

Conceito. O BSFC (brake specific fuel consumption) diz quantos gramas de combustível o motor gasta por kWh de trabalho no volante. Multiplicando pela potência e convertendo pela densidade, sai o fluxo em litros.

Fórmula. `ṁ = BSFC · P_motor , Q = ṁ / ρ_comb`

De onde vem. Com BSFC em g/kWh e P em kW, ṁ sai em g/h; divide-se por 1 000 para kg/h e pela densidade em kg/L para L/h. A 100 km/h o carro percorre 100 km em 1 h, então L/100 km coincide com L/h.

Resolução

1. **Massa de combustível.** ṁ = 250 g/kWh × 12,79 kW = 3 197 g/h = 3,197 kg/h.
2. **Volume.** Q = 3,197 / 0,75 = 4,26 L/h, ou 4,26 L/100 km nesta velocidade.

Resposta. 4,26 L/h, ou 4,26 L/100 km a 100 km/h.

Interpretação. 4,3 L/100 km em reta e no plano é um cruise econômico, típico de um hatch leve. No ciclo urbano o valor sobe, porque a potência média cai e o BSFC piora, e porque entra a energia das acelerações.

Erro comum a evitar. Dividir 250 por 12,79 em vez de multiplicar, ou esquecer que a 80 km/h o L/h já não é igual ao L/100 km (aí o fator é 100/v).

5.7. Aceleração máxima na arrancada, em 1ª (Básico)

Enunciado. Com F_t = 5 276 N do exercício 5.4, no plano e desprezando o arrasto no instante inicial, qual é a aceleração do up!?

Conceito. A segunda lei na direção do movimento: a força líquida, tração menos rolamento, acelera a massa translacional do veículo. Neste exercício ainda não entra a inércia rotacional do grupo motriz.

Fórmula. `a = (F_t − F_r) / m`

De onde vem. ΣF = m a no plano, com F_a ≈ 0 no instante em que v ≈ 0. O rolamento já resiste desde o início.

Resolução

1. **Força líquida.** F_líq = 5 276 − 105,9 = 5 170 N.
2. **Aceleração.** a = 5 170 / 900 = 5,74 m/s² = 0,586 g.

Resposta. a = 5,74 m/s², ou 0,586 g.

Interpretação. Quase 0,6 g na arrancada é um valor vigoroso para um hatch de 60 kW, porque a 1ª é curta. Vale só no início: à medida que a rotação sobe e o arrasto aparece, a aceleração cai, e ainda mais quando se passa de marcha.

Erro comum a evitar. Dividir F_t pelo peso m g e chamar isso de aceleração em m/s² (daria 0,60, que na verdade já é a ordem de grandeza em g, não em m/s²).

5.8. Potência máxima nas rodas (Básico)

Enunciado. O motor entrega no máximo 60 kW no volante. Com $\eta = 0{,}92$, qual é a potência máxima disponível nas rodas?

Conceito. A potência máxima nas rodas é a do motor multiplicada pelo rendimento da transmissão, no ponto em que o motor está no pico e a marcha escolhida deixa esse ponto alcançável.

Fórmula. $P_{roda,máx} = \eta\, P_{motor,máx}$

De onde vem. Definição de rendimento da transmissão no fluxo de potência do volante do motor até o contato do pneu.

Resolução

1. **Calcular.** $P_{roda,máx} = 0{,}92 \times 60 = 55{,}2$ kW.

Resposta. $P_{roda,máx} = 55{,}2$ kW.

Interpretação. Quase 5 kW ficam pelo caminho na transmissão, no pico. Essa é a potência que realmente pode ir para o arrasto, a rampa e a aceleração, e é ela que entra no cálculo da velocidade máxima.

Erro comum a evitar. Dividir 60 por 0,92 e obter 65,2 kW, invertendo o fluxo de potência (isso seria o motor necessário para ter 60 kW nas rodas).

5.9. Rotação da roda a 100 km/h (Básico)

Enunciado. Com o raio dinâmico de 0,29 m, qual é a rotação das rodas do up! a 100 km/h, em rad/s e em rpm?

Conceito. A rotação da roda depende só da velocidade e do raio, não da marcha. A marcha entra quando se passa da roda para o motor.

Fórmula. $\omega = v / r$, $n = \omega \cdot 60 / (2\pi)$

De onde vem. Velocidade tangencial $v = \omega\, r$ no contato, sem escorregamento (pneu rolando puro).

Resolução

1. **SI.** $v = 27{,}78$ m/s. $\omega = 27{,}78 / 0{,}29 = 95{,}8$ rad/s.
2. **rpm.** $n = 95{,}8 \times 60 / (2\pi) = 915$ rpm.

Resposta. $\omega = 95{,}8$ rad/s, ou 915 rpm.

Interpretação. A 100 km/h a roda gira a pouco menos de 1 000 rpm. Em 5ª, o motor fica em $915 \times 3{,}57 \approx 3\,270$ rpm, ainda abaixo do canto de 5 209 rpm da curva de potência.

Erro comum a evitar. Usar o diâmetro no lugar do raio, o que daria metade da rotação, ou deixar v em km/h.

5.10. Queda de rotação na troca de 3ª para 4ª (Básico)

Enunciado. O motor está a 5 000 rpm em 3ª (i = 1,40). Qual é a rotação logo após a troca instantânea para 4ª (i = 1,05), e a que velocidade isso acontece? i_0 = 4,20 e r = 0,29 m.

Conceito. Na troca instantânea a velocidade do veículo não dá um salto. A rotação do motor cai na razão das relações de marcha, e a velocidade se lê na marcha de partida.

Fórmula. `n_4 = n_3 (i_4 / i_3) , v = n_3 (2π / 60) r / (i_3 i_0)`

De onde vem. ω_roda é contínua. Como ω_motor = ω_roda i i_0, a razão n_depois / n_antes é i_depois / i_antes. A velocidade sai da cinemática na 3ª, antes da troca.

Resolução

1. **Rotação depois.** n_4 = 5 000 × (1,05 / 1,40) = 3 750 rpm.
2. **Velocidade.** v = 5 000 × (2π / 60) × 0,29 / (1,40 × 4,20) = 25,82 m/s = 93,0 km/h.

Resposta. n cai para 3 750 rpm, a 93,0 km/h.

Interpretação. A queda de 1 250 rpm tira o motor do pico de potência (o canto está em 5 209 rpm) e o leva de volta a uma faixa de torque cheio (110 N·m). Se a 4ª fosse longa demais, a rotação cairia para uma zona pobre de torque e a retomada ficaria preguiçosa.

Erro comum a evitar. Somar ou subtrair as relações em vez de fazer a razão 1,05/1,40, ou usar a 4ª já na cinemática da velocidade antes da troca.

5.11. Dois pontos da curva e o canto de potência máxima (Intermediário)

Enunciado. O motor entrega 110 N·m a 3 000 rpm e tem potência máxima de 60 kW. Qual é a potência a 3 000 rpm, o torque a 6 000 rpm se o motor já estiver limitado em potência, e a rotação do canto em que a curva de 110 N·m encontra os 60 kW?

Conceito. Potência e torque se ligam por P = τ ω. Enquanto o torque é constante, a potência sobe linearmente com a rotação. Depois do canto, a potência fica constante e o torque cai com 1/ω.

Fórmula. `P = τ ω , n_canto = (P_máx / τ_máx) · 60 / (2π)`

De onde vem. ω = 2π n / 60, com n em rpm. O canto é o ponto em que τ_máx ω = P_máx. Acima dele, τ = P_máx / ω.

Resolução

1. **Potência a 3 000 rpm.** ω = 3 000 × 2π / 60 = 314,2 rad/s. P = 110 × 314,2 = 34,56 kW.
2. **Torque a 6 000 rpm.** ω = 628,3 rad/s. τ = 60 000 / 628,3 = 95,5 N·m, menor que 110 N·m: já está na região limitada em potência.
3. **Canto.** n_canto = (60 000 / 110) × 60 / (2π) = 5 209 rpm.

Resposta. P(3 000 rpm) = 34,56 kW; τ(6 000 rpm) = 95,5 N·m; n_canto = 5 209 rpm.

Interpretação. Abaixo de 5 209 rpm o motor pode entregar os 110 N·m; acima, só o que a potência máxima permite. É por isso que uma troca de marcha no canto costuma ser a que aproveita melhor a faixa de potência.

Erro comum a evitar. Usar P = τ n com n em rpm, sem o 2π/60, o que daria 330 kW a 3 000 rpm, um absurdo para este motor.

5.12. Reforço de um motor elétrico P2 a 50 km/h (Intermediário)

Enunciado. Um motor elétrico P2 (eixo do motor de combustão) entrega 15 kW mecânicos a 50 km/h. Qual é a força extra nas rodas, admitindo que essa potência já inclui o rendimento até o pneu, e a aceleração extra que ela dá ao up! no plano, desprezando a variação das resistências?

Conceito. Potência é força vezes velocidade. Um boost elétrico em potência conhecida se converte imediatamente em força trativa extra, e essa força acelera a massa.

Fórmula. `F_el = P_el / v , a_el = F_el / m`

De onde vem. P = F v, com P já na roda. A aceleração extra é F_el / m se as resistências não mudam no instante considerado.

Resolução

1. **Velocidade e força.** v = 50 / 3,6 = 13,89 m/s. F_el = 15 000 / 13,89 = 1 080 N.
2. **Aceleração.** a_el = 1 080 / 900 = 1,20 m/s².

Resposta. F_el = 1 080 N e a_el = 1,20 m/s².

Interpretação. 1,2 m/s² a mais a 50 km/h é um empurrão nítido de retomada, típico de um híbrido leve a pleno na faixa intermediária. A mesma potência de 15 kW a 100 km/h cairia para 540 N e 0,60 m/s², porque a força é P/v.

Erro comum a evitar. Usar v em km/h no P/v (força 4,6 vezes menor) ou esquecer de converter 15 kW para 15 000 W.

5.13. Divisão de torque P2 a 80 km/h em 5ª (Intermediário)

Enunciado. No ponto do exercício 5.2, o motor de combustão precisava de 27,3 N·m. Se o motor elétrico P2, no mesmo eixo, entrega 20 N·m, quanto resta ao ICE e qual é a potência de cada um a 2 612 rpm?

Conceito. No híbrido paralelo P2 os dois torques se somam no mesmo eixo, antes da transmissão. A potência de cada máquina é o seu torque vezes a mesma rotação.

Fórmula. `τ_ICE = τ_eixo − τ_el , P = τ ω`

De onde vem. O eixo precisa do τ_eixo que já foi calculado no 5.2. O elétrico entra com 20 N·m e o ICE completa. ω é a do exercício 5.3.

Resolução

1. **Torques.** τ_ICE = 27,3 − 20,0 = 7,3 N·m.
2. **Potências.** ω = 2 612 × 2π / 60 = 273,5 rad/s. P_el = 20 × 273,5 = 5,47 kW. P_ICE = 7,3 × 273,5 = 2,00 kW. Soma 7,47 kW, que é a potência de eixo correspondente aos 6,87 kW nas rodas (7,47 × 0,92).

Resposta. τ_ICE = 7,3 N·m; P_el = 5,47 kW e P_ICE = 2,00 kW.

Interpretação. O ICE quase entra em folga e o elétrico leva a maior parte da cruise. É um ponto típico de condução elétrica assistida, desde que a bateria tenha carga. Se o τ_el passar de 27,3 N·m, o ICE pode desligar ou o excedente recarrega a bateria, conforme o controle.

Erro comum a evitar. Dividir os 20 N·m pela relação da 5ª antes de somar, como se o P2 estivesse no eixo da roda (arquitetura P4), o que mudaria toda a conta.

5.14. Faixa de uma CVT para manter 2 000 rpm (Intermediário)

Enunciado. Uma CVT deve manter o motor a 2 000 rpm tanto a 20 km/h quanto a 130 km/h. Quais são as relações totais i_tot = ω_motor / ω_roda nesses dois extremos, e qual é a amplitude i_máx / i_mín? r = 0,29 m.

Conceito. A CVT varia a relação de forma contínua para estacionar o motor num ponto de bom consumo. A amplitude da caixa é a razão entre a relação mais curta e a mais longa.

Fórmula. `i_tot = ω_motor r / v`

De onde vem. ω_roda = v / r e i_tot = ω_motor / ω_roda, já incluindo o diferencial. A amplitude é o quociente das duas relações.

Resolução

1. **Rotação do motor.** ω_motor = 2 000 × 2π / 60 = 209,4 rad/s.
2. **Relações.** A 20 km/h, v = 5,556 m/s, i_máx = 209,4 × 0,29 / 5,556 = 10,93. A 130 km/h, v = 36,11 m/s, i_mín = 1,68. Amplitude = 10,93 / 1,68 = 6,50.

Resposta. i_máx = 10,93, i_mín = 1,68 e amplitude 6,50.

Interpretação. Uma amplitude de 6,5 é factível numa CVT de automóvel. O câmbio manual de cinco marchas deste bloco vai de 15,12 a 3,57 (amplitude 4,2) e não conseguiria manter 2 000 rpm nos dois extremos.

Erro comum a evitar. Calcular as relações com v em km/h, ou reportar a amplitude como a diferença 10,93 − 1,68 = 9,25, que não é o que se usa para dimensionar a correia e as polias.

5.15. Energia dissipada na embreagem numa arrancada (Intermediário)

Enunciado. O motor é mantido a 2 000 rpm durante o patinamento, em 1ª (i = 3,60 e i_0 = 4,20). Qual é a velocidade de sincronismo e a energia dissipada na embreagem, no modelo em que a rotação do motor permanece constante até o acoplamento?

Conceito. Enquanto a embreagem patina, o motor está mais rápido que o eixo primário. Se a rotação do motor é mantida constante, a energia dissipada no atrito da embreagem é igual à energia cinética que o veículo ganha até o sincronismo.

Fórmula. `v_s = ω_motor r / (i i_0) , E = (1)/(2) m v_s²`

De onde vem. No sincronismo, a rotação do primário alcança a do motor, e v_s segue a cinemática da 1ª. Com ω_motor constante, o trabalho do motor é o dobro da energia cinética do carro: metade fica no veículo e metade vira calor na embreagem.

Resolução

1. **Velocidade de sincronismo.** ω_motor = 209,4 rad/s. v_s = 209,4 × 0,29 / 15,12 = 4,02 m/s = 14,5 km/h.
2. **Energia.** E = ½ × 900 × (4,02)² = 7,26 kJ.

Resposta. v_s = 14,5 km/h e E = 7,26 kJ.

Interpretação. Sete quilojoules numa única arrancada já aquecem o disco. Por isso o híbrido P2, que pode arrancar só com o motor elétrico e engatar o ICE já próximo do sincronismo, reduz bastante o desgaste e o calor da embreagem.

Erro comum a evitar. Usar a energia cinética a 80 km/h, ou esquecer o diferencial na cinemática, o que elevaria v_s para cerca de 61 km/h e a energia para quase 130 kJ.

5.16. Inércia rotacional refletida na arrancada em 1ª (Intermediário)

Enunciado. O volante e o motor têm $I_e = 0{,}12$ kg·m², e as quatro rodas somam $I_r = 2{,}40$ kg·m². Em 1ª ($i\,i_0 = 15{,}12$), qual é a inércia equivalente no eixo das rodas, a massa equivalente translacional e a nova aceleração inicial, comparada à do exercício 5.7?

Conceito. As inércias que giram com o motor aparecem na roda multiplicadas pelo quadrado da relação total. Somadas à inércia das rodas e divididas por r², viram uma massa extra que o carro precisa acelerar.

Fórmula. $I_{eq} = I_e\,(i\,i_0)^2 + I_r$, $m_{eq} = I_{eq} / r^2$, $a = (F_t - F_r) / (m + m_{eq})$

De onde vem. A energia cinética ½ $I_e\,\omega_e^2$ = ½ $I_e\,(i\,i_0)^2\,\omega_{roda}^2$, logo a inércia refletida é $I_e\,(i\,i_0)^2$. Em translação, ½ $I\,\omega^2$ = ½ $(I / r^2)\,v^2$. Este modelo ignora o rendimento na inércia (trata a transmissão como rígida e conservativa na parte inercial).

Resolução

1. **Inércia na roda.** $I_{eq} = 0{,}12 \times 15{,}12^2 + 2{,}40 = 27{,}43 + 2{,}40 = 29{,}83$ kg·m².
2. **Massa equivalente.** $m_{eq} = 29{,}83 / 0{,}29^2 = 354{,}7$ kg. Massa efetiva = 900 + 355 = 1 255 kg.
3. **Aceleração.** $a = 5\,170 / 1\,255 = 4{,}12$ m/s², ante 5,74 m/s² no exercício 5.7 (cerca de 28 % menor).

Resposta. $I_{eq} = 29{,}83$ kg·m², $m_{eq} = 355$ kg e $a = 4{,}12$ m/s² (28 % menor que 5,74 m/s²).

Interpretação. Em 1ª a inércia do motor pesa como se fossem mais 350 kg no carro. Em 5ª a relação cai para 3,57 e essa parcela cai no quadrado, para cerca de 20 kg — por isso o efeito é crítico na arrancada e quase irrelevante em cruise.

Erro comum a evitar. Multiplicar I_e por $i\,i_0$ (sem o quadrado), o que daria só 1,81 kg·m² de parcela do motor e quase não mudaria a aceleração.

5.17. Rendimento ideal de Otto e de Atkinson (Intermediário)

Enunciado. Compare o rendimento térmico ideal do ciclo Otto com taxa de compressão 10:1 ao de um Atkinson/Miller com taxa efetiva 12:1. Use γ = 1,40 e o modelo η = 1 − 1 / r^(γ−1).

Conceito. No modelo ar-padrão, o rendimento cresce com a taxa de compressão. O ciclo Atkinson/Miller aumenta a expansão efetiva em relação à admissão, e a fórmula com a taxa efetiva maior captura essa tendência, ainda que de modo simplificado.

Fórmula. `η = 1 − 1 /`

De onde vem. Eficiência do ciclo Otto (e da referência de Atkinson com a taxa de expansão efetiva no lugar de r), para gás perfeito com calores específicos constantes e combustão a volume constante.

Resolução

1. **Otto 10:1.** γ − 1 = 0,40. 10^{0,40} = 2,512. η = 1 − 1/2,512 = 0,602 = 60,2 %.
2. **Atkinson 12:1.** 12^{0,40} = 2,702. η = 1 − 1/2,702 = 0,630 = 63,0 %. Ganho de 2,8 pontos percentuais.

Resposta. η_Otto = 60,2 % e η_Atkinson = 63,0 %, um ganho de 2,8 pontos percentuais.

Interpretação. Dois a três pontos no ciclo ideal já justificam o Atkinson em híbridos, nos quais o motor elétrico cobre a perda de torque em baixa que esse ciclo costuma trazer. No motor real os rendimentos são bem menores (30 a 40 %), mas a tendência se mantém.

Erro comum a evitar. Usar r^{γ} no denominador em vez de r^{γ−1}, ou tratar 2,8 pontos percentuais como um ganho relativo de 2,8 % (o ganho relativo é 2,8/60,2 ≈ 4,6 %).

5.18. Caminho paralelo versus caminho série, 40 kW no ICE (Intermediário)

Enunciado. O motor de combustão entrega 40 kW no volante. No caminho paralelo, a transmissão tem η = 0,92. No caminho série, o gerador tem η_g = 0,94 e o motor elétrico η_m = 0,93, sem ida e volta na bateria. Qual é a potência nas rodas em cada arquitetura, e a diferença?

Conceito. No paralelo a maior parte da potência segue um caminho mecânico, com uma só perda de transmissão. No série, toda a potência vira eletricidade e depois outra vez mecânica, e as duas conversões se multiplicam.

Fórmula. `P_par = η P_ICE , P_série = η_g η_m P_ICE`

De onde vem. Rendimentos em cascata se multiplicam quando as potências estão em série. Aqui não há perda de carga e descarga da bateria, porque o fluxo é direto gerador–motor.

Resolução

1. **Paralelo.** P_par = 0,92 × 40 = 36,8 kW.
2. **Série.** P_série = 0,94 × 0,93 × 40 = 34,97 kW. Diferença = 1,83 kW, ou 5,0 % a menos no série.

Resposta. P_paralelo = 36,8 kW, P_série = 34,97 kW, diferença de 1,83 kW (5,0 %).

Interpretação. Cinco por cento a menos no série é o preço das duas conversões. O série ainda pode valer se o ICE trabalhar o tempo todo num ponto de BSFC melhor, ou se a transmissão mecânica for difícil de arranjar (extensor de autonomia, por exemplo).

Erro comum a evitar. Somar as perdas 6 % + 6 % + 7 % e concluir 19 % de perda no série, em vez de multiplicar os rendimentos (a perda real do caminho série é 1 − 0,874 = 12,6 %).

5.19. Deslocamento do ponto de carga com crédito da bateria (Intermediário)

Enunciado. A 100 km/h o ICE precisaria de 12,79 kW no volante, com BSFC de 250 g/kWh (exercício 5.6). Alternativamente, o controle sobe o ICE para 25 kW a 230 g/kWh e manda o excedente a um gerador de $\eta_g = 0{,}94$. Qual é o fluxo de combustível nas duas estratégias e o BSFC equivalente do segundo caso, creditando a energia elétrica armazenada?

Conceito. Subir a carga do ICE pode melhorar o consumo específico, mas gasta mais combustível na hora. A comparação justa desconta, no denominador, a energia que ficou na bateria, já depois da perda do gerador.

Fórmula. $\dot{m} = BSFC \cdot P$, $BSFC_{eq} = \dot{m} / (P_{rodagem} + P_{ger}\,\eta_g)$

De onde vem. No primeiro caso, $P_{rodagem} = 12{,}79$ kW e não há armazenamento. No segundo, $\dot{m}$ usa 25 kW e 230 g/kWh; o excedente $25 - 12{,}79$ passa pelo gerador e entra no denominador como energia útil creditada.

Resolução

1. **Estratégia direta.** $\dot{m}_1 = 250 \times 12{,}79 = 3\,197$ g/h = 3,20 kg/h, ou 250 g/kWh.
2. **Estratégia com carga.** $\dot{m}_2 = 230 \times 25 = 5\,750$ g/h = 5,75 kg/h. Energia creditada = $(25 - 12{,}79) \times 0{,}94 = 11{,}48$ kW.
3. **BSFC equivalente.** $BSFC_{eq} = 5\,750 / (12{,}79 + 11{,}48) = 5\,750 / 24{,}27 = 237$ g/kWh, 13 g/kWh melhor que 250.

Resposta. 3,20 kg/h a 250 g/kWh no direto; 5,75 kg/h no deslocado, com BSFC equivalente de 237 g/kWh já creditada a bateria.

Interpretação. O tanque gasta mais na hora, mas o kWh útil (rodagem + bateria) fica um pouco mais barato em combustível. A conta só fecha se essa carga da bateria for gasta depois com bom rendimento; se a bateria já estiver cheia, o deslocamento não se justifica.

Erro comum a evitar. Comparar 5,75 kg/h com 3,20 kg/h e concluir que o deslocamento é bem pior, sem creditar os 11,48 kW que entraram na bateria.

5.20. Consumo em um ciclo de 100 km com potência média de 8 kW (Intermediário)

Enunciado. Num ciclo de 100 km a velocidade média é 50 km/h e a potência média nas rodas é 8,0 kW. Com $\eta = 0{,}92$ e BSFC médio de 250 g/kWh, qual é a energia nas rodas, a energia no volante do ICE, a massa de combustível e o consumo em L/100 km (0,75 kg/L)?

Conceito. A energia é a potência média vezes o tempo do ciclo. O tempo sai da velocidade média, a transmissão sobe a energia até o volante, e o BSFC converte essa energia em combustível.

Fórmula. `t = s / v_méd , E_roda = P_méd t , E_ICE = E_roda / η`

De onde vem. Com P em kW e t em horas, E sai em kWh, que é a unidade do BSFC. Massa = BSFC × E_ICE, e o volume divide pela densidade.

Resolução

1. **Tempo e energia.** t = 100 / 50 = 2,0 h. E_roda = 8,0 × 2,0 = 16,0 kWh. E_ICE = 16,0 / 0,92 = 17,39 kWh.
2. **Combustível.** m = 250 g/kWh × 17,39 kWh = 4,35 kg. Volume = 4,35 / 0,75 = 5,80 L, ou 5,80 L/100 km.

Resposta. E_roda = 16,0 kWh, E_ICE = 17,39 kWh, 4,35 kg de combustível e 5,80 L/100 km.

Interpretação. O ciclo a 50 km/h com 8 kW médios já pede 5,8 L/100 km, contra 4,3 L/100 km do cruise a 100 km/h do exercício 5.6. A diferença é o tempo longo e as idas e vindas de carga que um ciclo urbano representa, mesmo com o mesmo BSFC médio.

Erro comum a evitar. Usar t = 1 h (como se a média fosse 100 km/h) e obter metade do combustível, ou aplicar o BSFC sobre os 16 kWh das rodas, sem dividir por η.

5.21. Melhor marcha para acelerar a 50 km/h (Desafio)

Enunciado. A 50 km/h, em qual marcha o up! acelera mais, respeitando o limite de 6 000 rpm e a curva do exercício 5.11 (110 N·m até 5 209 rpm, depois 60 kW)? Inclua rolamento e arrasto no plano.

Conceito. A marcha mais curta multiplica mais o torque, mas pode estourar a rotação e cair na região de potência limitada — ou simplesmente ficar acima do corte. A melhor é a mais curta que ainda esteja abaixo do corte.

Fórmula. $F_t = \tau(n)\, i\, i_0\, \eta / r$, $a = (F_t - F_r - F_a) / m$

De onde vem. n = n_roda i i_0, com τ(n) = τ_máx enquanto P ≤ P_máx e τ = P_máx / ω depois do canto. Marchas com n > 6 000 rpm estão indisponíveis.

Resolução

1. **Rotação em cada marcha.** A 50 km/h, n_roda = 458 rpm (metade dos 915 rpm do exercício 5.9). 1ª: 6 915 rpm, acima do corte. 2ª: 4 034 rpm. 3ª: 2 689 rpm. 4ª: 2 017 rpm. 5ª: 1 633 rpm.
2. **1ª indisponível.** 6 915 rpm passa de 6 000 rpm: essa marcha não pode ser usada a 50 km/h.
3. **Forças e acelerações.** F_r + F_a = 105,9 + 0,4116 × (13,89)² = 185,4 N. Em 2ª, τ = 110 N·m, F_t = 3 078 N, a = 3,21 m/s². Em 3ª, a = 2,07 m/s²; em 4ª, 1,50 m/s²; em 5ª, 1,18 m/s².

Resposta. A 1ª estoura o corte (6 915 rpm). A melhor é a 2ª, com a = 3,21 m/s².

Interpretação. A intuição ‘quanto mais curta, melhor’ quebra no corte. A 50 km/h o motor em 1ª já teria passado de 6 000 rpm; a 2ª ainda está em torque cheio (4 034 rpm < 5 209 rpm) e entrega a maior aceleração útil.

Erro comum a evitar. Usar a 1ª mesmo com 6 915 rpm, ou calcular a 1ª já limitada em 60 kW (a ≈ 4,21 m/s²) sem respeitar o corte de rotação.

5.22. Velocidade do canto de potência em cada marcha (Desafio)

Enunciado. Com n_canto = 5 209 rpm, calcule a velocidade do veículo, em cada uma das cinco marchas, no instante em que o motor deixa o torque cheio e entra na região de potência máxima.

Conceito. O canto da curva do motor se mapeia em uma velocidade diferente em cada marcha. Essas velocidades marcam a transição da reta de força trativa (torque limitado) para a hipérbole de potência limitada.

Fórmula. $v = \omega_{canto}\, r / (i\, i_0)$

De onde vem. A cinemática é a mesma do exercício 5.3, agora com a rotação fixada no canto de 5 209 rpm.

Resolução

1. **1ª e 2ª.** v_1 = 37,7 km/h. v_2 = 64,6 km/h.
2. **3ª a 5ª.** v_3 = 96,8 km/h. v_4 = 129,1 km/h. v_5 = 159,5 km/h.

Resposta. 37,7; 64,6; 96,8; 129,1 e 159,5 km/h, da 1ª à 5ª.

Interpretação. A 100 km/h o motor em 3ª já passou do canto (96,8 km/h) e está limitado em potência; em 4ª e 5ª ainda está em torque cheio. Por isso uma retomada em 3ª a 100 km/h usa a hipérbole de 60 kW, não os 110 N·m.

Erro comum a evitar. Usar 6 000 rpm no lugar do canto, o que atrasaria todas as velocidades na razão 6 000/5 209 e deslocaria a 3ª para cerca de 111 km/h.

5.23. Híbrido série: do combustível até a roda (Desafio)

Enunciado. O ICE entrega 20 kW ao gerador, com BSFC de 250 g/kWh. O caminho é gerador $\eta_g = 0{,}94$, bateria (ida) $\eta_b = 0{,}95$ e motor de tração $\eta_m = 0{,}93$. Qual é a potência nas rodas, o fluxo de combustível e o BSFC equivalente na roda?

Conceito. No série, toda a cadeia é elétrica depois do gerador. Os rendimentos se multiplicam, e o BSFC na roda é o do motor dividido pelo rendimento total do caminho.

Fórmula. $P_{roda} = \eta_g\,\eta_b\,\eta_m\,P_{ICE}$, $BSFC_{roda} = BSFC / (\eta_g\,\eta_b\,\eta_m)$

De onde vem. P_{roda} / P_{ICE} é o produto dos três rendimentos. O fluxo de combustível depende só do ICE, então o BSFC referido à roda cresce na inversa desse produto.

Resolução

1. **Rendimento do caminho.** $\eta = 0{,}94 \times 0{,}95 \times 0{,}93 = 0{,}8305$.
2. **Potência e combustível.** $P_{roda} = 0{,}8305 \times 20 = 16{,}61$ kW. $\dot{m} = 250 \times 20 = 5\,000$ g/h $= 5{,}00$ kg/h.
3. **BSFC na roda.** $BSFC_{roda} = 5\,000 / 16{,}61 = 301$ g/kWh, ou $250 / 0{,}8305 = 301$ g/kWh.

Resposta. $P_{roda} = 16{,}61$ kW, $\dot{m} = 5{,}00$ kg/h e $BSFC_{roda} = 301$ g/kWh.

Interpretação. O caminho série ‘piora’ o BSFC de 250 para 301 g/kWh, uma penalidade de 20 %. Ela só se paga se o ICE, livre da roda, trabalhar num ponto bem melhor do que trabalharia no paralelo direto, ou se houver um ganho de regeneração no ciclo.

Erro comum a evitar. Somar 6 + 5 + 7 % de perda e aplicar 18 % ($P_{roda} = 16{,}4$ kW), em vez de multiplicar os rendimentos.

5.24. Qual marcha aproxima o motor da ilha de 3 000 rpm a 80 km/h (Desafio)

Enunciado. A ilha de melhor BSFC deste motor de exemplo está em 3 000 rpm. A 80 km/h, qual marcha (4ª ou 5ª) deixa o motor mais perto desse ponto, e qual é o afastamento em rpm?

Conceito. Num híbrido, ou numa troca antecipada, escolhe-se a marcha que estaciona o ICE perto da ilha de consumo, não necessariamente a mais longa. A cinemática decide a rotação; o controle decide se o elétrico completa o torque.

Fórmula. $n = n_{roda} \cdot i \cdot i_0$

De onde vem. A mesma cinemática do exercício 5.3, agora comparada nas duas marchas longas, com $n_{roda} = 732$ rpm a 80 km/h.

Resolução

1. **Rotações.** 5ª: $732 \times 3{,}57 = 2\,612$ rpm (afasta 388 rpm). 4ª: $732 \times 1{,}05 \times 4{,}20 = 3\,227$ rpm (afasta 227 rpm).
2. **Escolha.** A 4ª fica mais perto dos 3 000 rpm.

Resposta. A 4ª, a 3 227 rpm, 227 rpm acima do alvo; a 5ª fica 388 rpm abaixo, em 2 612 rpm.

Interpretação. Ficar em 4ª a 80 km/h pede um pouco mais de rotação, mas estaciona o ICE mais perto da ilha. O híbrido pode então deixar o torque do ICE no melhor BSFC e completar ou aliviar com o P2, como no exercício 5.13.

Erro comum a evitar. Escolher automaticamente a 5ª por ser a mais longa, sem calcular a rotação, que é o que a ilha de consumo realmente vê.

5.25. Tempo de 0 a 100 km/h com trocas no corte (Desafio)

Enunciado. Simule o up! de 0 a 100 km/h no plano, com a curva do exercício 5.11, trocas instantâneas no corte de 6 000 rpm (sempre a marcha mais curta disponível), η = 0,92, rolamento e arrasto, e sem inércia rotacional. Qual é o tempo?

Conceito. O tempo sai da integração de a(v) = (F_t(v) − F_r − F_a(v)) / m. F_t muda a cada marcha e também quando o motor cruza o canto de 5 209 rpm dentro da mesma marcha.

Fórmula. `Δv = a(v) Δt , t = Σ Δt`

De onde vem. Integração explícita de Euler com passo de 0,01 s, partindo de v ≈ 0. A marcha é a mais curta com n ≤ 6 000 rpm. Este modelo não inclui tempo de troca nem a massa equivalente do exercício 5.16, então o resultado é um piso otimista.

Resolução

1. **Regra de marcha.** Permanece-se em cada marcha até 6 000 rpm e passa-se instantaneamente à seguinte, como no exercício 5.10.
2. **Integração.** Com Δt = 0,01 s, o veículo atinge 100 km/h em 8,67 s.

Resposta. t = 8,67 s de 0 a 100 km/h, neste modelo.

Interpretação. Cerca de 8,7 s é um piso otimista: não há tempo de troca nem a massa equivalente de 355 kg em 1ª do exercício 5.16. Com essa inércia o tempo sobe alguns segundos, mais próximo de um hatch compacto real de 60 kW.

Erro comum a evitar. Usar a = 5,74 m/s² constante do exercício 5.7 o tempo todo: t = v/a = 27,78 / 5,74 = 4,8 s, irrealisticamente baixo, porque ignora as trocas, o canto de potência e o arrasto.

5.26. Charge-sustaining com 30 % da energia pelo caminho série (Desafio)

Enunciado. No ciclo do exercício 5.20 (16,0 kWh nas rodas em 100 km), 70 % da energia chega pelo caminho paralelo (η = 0,92) e 30 % pelo caminho série direto gerador–motor (η_g η_m = 0,94 × 0,93), com bateria em carga líquida nula. Qual é a energia que o ICE precisa entregar e o consumo em L/100 km, com BSFC médio de 250 g/kWh e 0,75 kg/L?

Conceito. Em charge-sustaining a bateria começa e termina no mesmo estado de carga, então toda a energia das rodas, já descontados os rendimentos, sai do tanque. Cada caminho tem o seu rendimento, e as parcelas de energia se somam no volante do ICE.

Fórmula. `E_ICE = 0,70 E_roda / η_par + 0,30 E_roda / (η_g η_m)`

De onde vem. Inverte-se cada rendimento sobre a respectiva parcela de energia na roda. O BSFC médio converte E_ICE em massa de combustível, como no 5.20.

Resolução

1. **Parcelas no ICE.** Paralelo: 0,70 × 16,0 / 0,92 = 12,17 kWh. Série: 0,30 × 16,0 / (0,94 × 0,93) = 5,49 kWh. E_ICE = 17,66 kWh (ante 17,39 kWh se tudo fosse paralelo).
2. **Combustível.** m = 250 × 17,66 / 1 000 = 4,42 kg. Volume = 4,42 / 0,75 = 5,89 L/100 km.

Resposta. E_ICE = 17,66 kWh e 5,89 L/100 km.

Interpretação. Passar 30 % da energia pelo série custa 0,09 L/100 km a mais, com o mesmo BSFC médio. Esse custo só se paga se o caminho série permitir um BSFC bem melhor, ou se trouxer regeneração que este enunciado, em carga líquida nula já na roda, não contabiliza à parte.

Erro comum a evitar. Aplicar um rendimento médio (0,70 × 0,92 + 0,30 × 0,874) sobre os 16 kWh e inverter, o que é razoável mas não é o mesmo que somar as energias no ICE: rendimentos se combinam pela energia, não pela média aritmética das eficiências.

5.27. Calor rejeitado com o motor a 30 kW e η = 0,32 (Desafio)

Enunciado. O ICE entrega 30 kW no volante com rendimento térmico efetivo de 32 %. Qual é a potência do combustível, o calor total rejeitado e a parcela que vai para o sistema de arrefecimento, se esta for 30 % do calor rejeitado?

Conceito. A maior parte da energia do combustível não vira trabalho. O que não sai no volante é calor no escapamento, no bloco e por convecção. Só uma fração desse calor passa pelo radiador, e é ela que dimensiona o arrefecimento.

Fórmula. `P_comb = P_ICE / η , Q̇_rej = P_comb − P_ICE , Q̇_arref = 0,30 Q̇_rej`

De onde vem. η = P_ICE / P_comb por definição do rendimento efetivo. A diferença é o calor rejeitado total. O fator 30 % é um dado de exemplo para a parcela que atravessa o fluido de arrefecimento (o restante sai sobretudo no escapamento e na cárter/convecção).

Resolução

1. **Combustível e rejeição.** P_comb = 30 / 0,32 = 93,75 kW. Q̇_rej = 93,75 − 30 = 63,75 kW.
2. **Arrefecimento.** Q̇_arref = 0,30 × 63,75 = 19,13 kW.

Resposta. P_comb = 93,8 kW, Q̇_rej = 63,8 kW e Q̇_arref = 19,1 kW.

Interpretação. Quase 20 kW no radiador com o motor a 30 kW: o sistema de arrefecimento trabalha na mesma ordem da potência útil. Num híbrido que desloca o ICE para pontos de carga mais alta, essa carga térmica também sobe e precisa ser verificada.

Erro comum a evitar. Calcular o calor rejeitado como (1 − η) × 30 kW = 20,4 kW, esquecendo que η é P_ICE / P_comb e o calor é P_ICE (1/η − 1) = 63,8 kW.

5.28. Arrancada só com o P2 e depois com o ICE (Desafio)

Enunciado. O motor elétrico P2 entrega 80 N·m no eixo do ICE, em 1ª (i i_0 = 15,12, η = 0,92). Qual é a força trativa e a aceleração inicial no plano, só com o elétrico? E depois que o ICE acrescenta 110 N·m no mesmo eixo? Despreze a inércia rotacional e o arrasto no instante inicial.

Conceito. No P2 os torques se somam antes da transmissão. A arrancada pode ser só elétrica, e o ICE entra depois, já perto do sincronismo, para não patinar a embreagem como no exercício 5.15.

Fórmula. `F_t = (τ_el + τ_ICE) i i_0 η / r`

De onde vem. A mesma transformação do exercício 5.4, agora com a soma dos torques no eixo. A aceleração no plano e em v ≈ 0 é (F_t − F_r)/m.

Resolução

1. **Só o elétrico.** F_el = 80 × 15,12 × 0,92 / 0,29 = 3 837 N. a_el = (3 837 − 105,9) / 900 = 4,15 m/s².
2. **Os dois juntos.** F_tot = (80 + 110) × 15,12 × 0,92 / 0,29 = 9 114 N. a_tot = (9 114 − 105,9) / 900 = 10,01 m/s². Sem o elétrico, só o ICE volta ao exercício 5.7: 5,74 m/s².

Resposta. Só o P2: F_t = 3 837 N e a = 4,15 m/s². Com o ICE: F_t = 9 114 N e a = 10,01 m/s².

Interpretação. O P2 sozinho já arranca com 4,15 m/s², suficiente no dia a dia e sem dissipar os 7,26 kJ do exercício 5.15. Os dois juntos passam de 1 g — aí o limite passa a ser o atrito (μ m g = 7 063 N, menor que 9 114 N) e as rodas motrizes patinariam neste modelo.

Erro comum a evitar. Somar as forças depois de passar só o torque do ICE pela transmissão, esquecendo que o P2 também é multiplicado por i i_0, ou ignorar que 9 114 N já excede o teto de atrito.

5.29. Rendimento por engrenamento: 2 ou 3 pares (Desafio)

Enunciado. Cada par de engrenagens tem η_par = 0,97. A 5ª usa dois pares (engrenamento da marcha e diferencial) e a 1ª, neste câmbio de exemplo, usa três pares. Quais são os rendimentos totais, e quanto cai a força trativa do exercício 5.4 se, em vez de η = 0,92, for usado o valor de três pares?

Conceito. Rendimentos em série se multiplicam. Uma marcha que passa por um par a mais chega à roda com menos força, mesmo com o mesmo torque no motor.

Fórmula. `η_total = η_par^k , F_t = τ i i_0 η_total / r`

De onde vem. k é o número de pares no fluxo de potência. O modelo de η = 0,92 usado no bloco é uma média; aqui se decompõe por marcha.

Resolução

1. **Rendimentos.** Dois pares: $0{,}97^2 = 0{,}9409$ (94,1 %). Três pares: $0{,}97^3 = 0{,}9127$ (91,3 %).
2. **Força em 1ª.** Com η = 0,9127, F_t = 110 × 15,12 × 0,9127 / 0,29 = 5 234 N, 42 N abaixo dos 5 276 N do exercício 5.4 (η = 0,92).

Resposta. η_2 = 94,1 %, η_3 = 91,3 %; F_t em 1ª cai para 5 234 N (42 N a menos que com η = 0,92).

Interpretação. A diferença é pequena neste número, mas o princípio importa: marchas que atravessam mais pares, ou um diferencial mais complexo, chegam com menos rendimento. O η = 0,92 adotado no bloco está bem alinhado com a 1ª de três pares.

Erro comum a evitar. Somar 3 × 3 % e usar η = 0,91, ou elevar 0,97 à relação de marcha 3,60, que não é o número de pares.

5.30. Subida de 6 % a 80 km/h em 5ª: potência e reserva de torque (Desafio)

Enunciado. O up! sobe uma rampa de 6 % a 80 km/h constantes, em 5ª. Calcule a força total, a potência nas rodas e no motor ($\eta = 0{,}92$), o torque pedido ao ICE e a reserva até os 110 N·m disponíveis nessa rotação.

Conceito. Em regime, a tração equilibra rolamento, arrasto e a componente de rampa. A marcha entra só para converter essa potência em torque e rotação no motor, e para ver se há reserva para acelerar ou para uma rampa maior.

Fórmula. $F = F_r + F_a + m\,g\,\operatorname{sen}\theta\ ,\ \tau_{motor} = F\,r\,/\,(i\,i_0\,\eta)$

De onde vem. $\operatorname{sen}\theta = i / \sqrt{1 + i^2}$, com $i = 0{,}06$, a mesma conversão dos exercícios de dinâmica. A cinemática da 5ª a 80 km/h já foi feita no 5.3 (2 612 rpm), faixa de torque cheio.

Resolução

1. **Rampa e forças.** $\operatorname{sen}\theta = 0{,}06 / \sqrt{1 + 0{,}06^2} = 0{,}0599$. $F_g = 900 \times 9{,}81 \times 0{,}0599 = 529$ N. $F_r + F_a = 309{,}2$ N (exercício 5.2). $F = 838$ N.
2. **Potências.** $v = 22{,}22$ m/s. $P_{roda} = 838 \times 22{,}22 = 18{,}62$ kW. $P_{motor} = 18{,}62 / 0{,}92 = 20{,}24$ kW.
3. **Torque e reserva.** $\tau_{motor} = 838 \times 0{,}29 / (3{,}57 \times 0{,}92) = 74{,}0$ N·m. Reserva $= 110 - 74 = 36$ N·m, cerca de 33 % do torque máximo.

Resposta. $F = 838$ N, $P_{roda} = 18{,}62$ kW, $P_{motor} = 20{,}24$ kW, $\tau = 74{,}0$ N·m e reserva de 36 N·m.

Interpretação. A 6 % e 80 km/h o motor usa só 20 kW dos 60 kW e 74 N·m dos 110 N·m, ainda em 5ª. Há reserva para acelerar ou para um vento de frente. Se a rampa crescer até o torque pedido chegar a 110 N·m, a 5ª deixa de dar conta em regime e será preciso reduzir.

Erro comum a evitar. Usar $\operatorname{sen}\theta \approx 0{,}06$ exatamente (erro pequeno aqui) e, pior, esquecer o arrasto, o que cairia a potência no motor para cerca de 14,7 kW e mascararia quase 6 kW de pedido aerodinâmico.

Simulação Computacional da Dinâmica Veicular (16 h)

6.1. Passo de tempo a partir do período de ride (Básico)

Enunciado. A frequência natural do canto dianteiro é 1,56 Hz. Qual é o período de oscilação e o passo de tempo recomendado se quisermos pelo menos 20 passos em cada período?

Conceito. O passo de tempo de uma simulação de ride precisa resolver o período natural com folga. Uma regra prática de projeto é 10 a 20 passos por período do modo mais rápido que se quer representar bem.

Fórmula. `T = 1 / f_n , Δt = T / N`

De onde vem. O período é o inverso da frequência. Dividir o período pelo número mínimo de amostras por ciclo dá o maior Δt aceitável para essa regra.

Resolução

1. **Período.** T = 1 / 1,56 = 0,641 s.
2. **Passo.** Δt = 0,641 / 20 = 0,0321 s, ou 32,1 ms.

Resposta. T = 0,641 s e Δt = 32,1 ms (cerca de 31 Hz de amostragem).

Interpretação. 32 ms resolve o bounce de 1,56 Hz, mas não resolve o hop de 12 Hz do exercício 4.11. Se os dois modos estiverem no modelo, o passo é ditado pelo mais rápido, como no exercício 6.8.

Erro comum a evitar. Usar Δt = 1 / f_n = 0,64 s, ou seja, um único ponto por período, o que não descreve uma oscilação e deixa o integrador instável ou inútil.

6.2. Um passo de Euler com aceleração constante (Básico)

Enunciado. O up! parte do repouso com a = 5,74 m/s² (exercício 5.7). Com o método de Euler explícito e Δt = 0,10 s, qual é a velocidade após 1,00 s, e como ela se compara com a solução exata?

Conceito. Euler explícito avança v_n+1 = v_n + a Δt. Quando a é constante, o método é exato para a velocidade (erros só apareceriam na posição se a velocidade usada no passo de posição estiver atrasada).

Fórmula. `v_n+1 = v_n + a Δt`

De onde vem. É a discretização da definição a = dv/dt, com a avaliada no início do passo. Com a constante, v(t) = a t é linear e Euler a reproduz sem erro de truncamento.

Resolução

1. **Número de passos.** N = 1,00 / 0,10 = 10 passos.
2. **Velocidade.** v = 0 + 10 × 5,74 × 0,10 = 5,74 m/s, igual à solução exata v = a t = 5,74 m/s (20,7 km/h).

Resposta. v = 5,74 m/s após 1,00 s, igual à solução exata.

Interpretação. Com aceleração constante, Euler não erra a velocidade. O método só começa a mostrar a sua cara quando a força depende da velocidade ou da posição — arrasto, mola, amortecedor — como nos exercícios seguintes.

Erro comum a evitar. Avançar a posição com s_n+1 = s_n + v_n Δt + ½ a Δt² e achar que isso é Euler explícito clássico (isso já é o cinemático exato de a constante, ou um Euler-Cromer melhorado).

6.3. Distância de frenagem por Euler versus a fórmula fechada (Básico)

Enunciado. O up! freia a 100 km/h com a = μ g = 7,848 m/s², constante, até parar. Integre s_n+1 = s_n + v_n Δt e v_n+1 = v_n − a Δt com Δt = 0,05 s e compare com s = v² / (2 a).

Conceito. Aqui a velocidade é linear, mas a posição no Euler clássico usa sempre a velocidade do início do passo, um pouco maior do que a média do intervalo. O resultado é uma distância um pouco superestimada, e o erro cai quando Δt diminui.

Fórmula. `s_exata = v² / (2 a) , s_n+1 = s_n + v_n Δt`

De onde vem. A fórmula fechada vem de v² = v0² − 2 a s, com v = 0. O Euler explícito avalia v no lado esquerdo de cada intervalo, por isso acumula um excesso da ordem de ½ a Δt em cada passo de posição, no total próximo de ½ a Δt × (t/Δt) × Δt = ½ v0 Δt.

Resolução

1. **Solução fechada.** v0 = 27,78 m/s. s_exata = (27,78)² / (2 × 7,848) = 49,16 m. t_exato = 27,78 / 7,848 = 3,54 s.
2. **Euler com Δt = 0,05 s.** A integração (parando quando v cruza zero) dá s ≈ 49,86 m, 0,70 m a mais (1,4 %). O excesso é da ordem de ½ v0 Δt = 0,69 m.

Resposta. s_exata = 49,16 m; Euler com Δt = 0,05 s dá 49,86 m, um excesso de 0,70 m.

Interpretação. Setenta centímetros a mais numa parada de 49 m já seria visível numa validação. O remédio é reduzir o passo (com 0,01 s o excesso cai para cerca de 0,14 m) ou usar a velocidade média do intervalo, que neste caso recupera a fórmula exata.

Erro comum a evitar. Continuar integrando depois de v ficar negativo, o que acrescenta um último passo para trás e distorce a distância, ou comparar com v²/a em vez de v²/(2a).

6.4. Um passo do atraso de primeira ordem do pneu (Básico)

Enunciado. Um modelo de relaxamento de pneu é τ ẏ + y = u, com τ = 0,05 s. No instante t_n, y = 1,0° e o comando (ângulo ou força) é u = 3,0°. Com Euler explícito e Δt = 0,01 s, qual é y no passo seguinte?

Conceito. O pneu não responde de imediato a um ângulo de deriva: a força (ou o ângulo efetivo) relaxa com uma constante de tempo. Em discreto, isso vira um filtro de primeira ordem.

Fórmula. `y_n+1 = y_n + (Δt / τ) (u − y_n)`

De onde vem. De ẏ = (u − y)/τ, Euler explícito troca ẏ por (y_n+1 − y_n)/Δt e isola y_n+1.

Resolução

1. **Incremento.** Δt / τ = 0,01 / 0,05 = 0,20. u − y = 2,0°.
2. **Atualização.** y_n+1 = 1,0 + 0,20 × 2,0 = 1,40°.

Resposta. y_n+1 = 1,40°.

Interpretação. Num único passo de 10 ms o pneu só andou 0,40° dos 2° que faltavam. A regra Δt < τ (aqui 0,01 < 0,05) mantém o Euler explícito estável; se Δt passar de 2τ, o filtro discreto oscila e pode divergir.

Erro comum a evitar. Atualizar y_n+1 = u, como se o pneu fosse algébrico, ou usar (τ / Δt) no lugar de (Δt / τ), o que explodiria o passo.

6.5. Nyquist e amostragem do hop de 12,0 Hz (Básico)

Enunciado. O modo hop do exercício 4.11 tem f_hop = 12,0 Hz. Qual é a frequência mínima de Nyquist para não aliasar esse modo, e qual Δt corresponde a amostrá-lo com 10 pontos por período?

Conceito. O critério de Nyquist pede taxa de amostragem maior que o dobro da maior frequência presente. Na prática, um modelo de tempo discreto precisa de bem mais do que duas amostras por ciclo para a amplitude e a fase saírem corretas.

Fórmula. $f_{s,mín} = 2\,f_{hop}$, $\Delta t = 1 / (N\,f_{hop})$

De onde vem. Nyquist: $f_s > 2\,f_{máx}$. A regra de 10 pontos por período é um requisito de resolução, mais exigente, e dá $\Delta t = T / 10 = 1 / (10\,f)$.

Resolução

1. **Nyquist.** $f_{s,mín} = 2 \times 12{,}0 = 24{,}0$ Hz, ou $\Delta t < 41{,}7$ ms.
2. **Dez pontos por período.** $T = 1 / 12{,}0 = 83{,}3$ ms. $\Delta t = 8{,}33$ ms, ou $f_s = 120$ Hz.

Resposta. Nyquist: 24,0 Hz ($\Delta t < 41{,}7$ ms). Com 10 pontos por período: $\Delta t = 8{,}33$ ms (120 Hz).

Interpretação. Se o passo for o de ride do exercício 6.1 (32 ms), o hop de 12 Hz tem só 2,6 amostras por ciclo, quase no limite de Nyquist, e o modo não suspenso sai distorcido. Simular hop de verdade pede milissegundos, não centenas de milésimos.

Erro comum a evitar. Tomar $f_s = f_{hop} = 12$ Hz (uma amostra por ciclo) ou usar o Δt de ride para um modelo que inclui massa não suspensa e pneu.

6.6. Aceleração por diferença finita central (Básico)

Enunciado. Um registro de velocidade, amostrado a cada 0,10 s, traz 20,0 m/s, 21,5 m/s e 23,2 m/s em três instantes consecutivos. Estime a aceleração no instante do meio pela diferença central, e compare com as diferenças avançada e atrasada.

Conceito. A derivada numérica mais simples é a diferença entre duas amostras vizinhas. A diferença central, que olha um passo à frente e um atrás, cancela o erro de primeira ordem e é mais precisa no ponto do meio.

Fórmula. `a_c = (v_n+1 − v_n−1) / (2 Δt)`

De onde vem. Vem da expansão de Taylor de v(t+Δt) e v(t−Δt): a diferença central elimina o termo em v, e o erro começa em (Δt)² v‴ / 6. As diferenças avançada (v_n+1 − v_n)/Δt e atrasada (v_n − v_n−1)/Δt erram já na ordem Δt.

Resolução

1. **Central.** a_c = (23,2 − 20,0) / (2 × 0,10) = 3,2 / 0,20 = 16,0 m/s².
2. **Avançada e atrasada.** a_av = (23,2 − 21,5) / 0,10 = 17,0 m/s². a_at = (21,5 − 20,0) / 0,10 = 15,0 m/s². A central é exatamente a média das duas, 16,0 m/s².

Resposta. a_central = 16,0 m/s²; a avançada dá 17,0 e a atrasada 15,0 m/s².

Interpretação. A velocidade está crescendo cada vez mais rápido, então a avançada (que olha o trecho mais recente) sai maior. Em um sinal com ruído, porém, a central ainda é preferível, e um filtro entra antes da derivada, como no exercício 6.15.

Erro comum a evitar. Dividir 23,2 − 20,0 por 0,10 em vez de 0,20, o que dobraria a aceleração para 32 m/s², cerca de 3 g, irreal neste trecho.

6.7. Polos do canto dianteiro no plano complexo (Básico)

Enunciado. Com ω_n = 9,78 rad/s e ζ = 0,29 (exercícios 4.1 e 4.3), calcule os polos do sistema massa–mola–amortecedor de 1 GDL e a frequência de oscilação amortecida.

Conceito. Os polos são as raízes de s² + 2 ζ ω_n s + ω_n² = 0. Com ζ < 1 eles são complexos conjugados, e a parte imaginária é a frequência de oscilação que de fato aparece na resposta livre.

Fórmula. `s = −ζ ω_n ± j ω_n √(1 − ζ²)`

De onde vem. Solução característica do oscilador subamortecido. A frequência amortecida é ω_d = ω_n √(1 − ζ²), e o decaimento é e^{−ζ ω_n t}.

Resolução

1. **Parte real.** σ = −0,29 × 9,78 = −2,84 rad/s.
2. **Parte imaginária.** ω_d = 9,78 × √(1 − 0,29²) = 9,78 × 0,957 = 9,36 rad/s = 1,49 Hz. Polos: −2,84 ± j 9,36.

Resposta. Polos em −2,84 ± j 9,36 rad/s, com f_d = 1,49 Hz.

Interpretação. A oscilação livre é um pouco mais lenta que os 1,56 Hz naturais (1,49 Hz), e a envelope cai com constante de tempo 1/2,84 ≈ 0,35 s, coerente com os 1,40 s para 2 % do exercício 4.15 (cerca de quatro constantes de tempo).

Erro comum a evitar. Esquecer o √(1 − ζ²) e usar 9,78 rad/s como parte imaginária, ou reportar os polos em hertz misturados com rad/s.

6.8. Passo de tempo ditado pelo hop (Básico)

Enunciado. Um modelo de 2 GDL inclui o hop de 12,0 Hz e o ride de 1,56 Hz. Qual Δt atende 20 passos por período do modo mais rápido? Quantas amostras por ciclo de ride isso equivale?

Conceito. Num sistema com modos rápidos e lentos, o passo estável e preciso é imposto pelo modo mais rápido. O modo lento fica automaticamente superamostrado.

Fórmula. `Δt = 1 / (N f_hop) , N_ride = f_s / f_n`

De onde vem. A mesma regra do exercício 6.1, aplicada agora a f_hop. A taxa f_s = N f_hop, dividida por f_n, dá os pontos por ciclo de ride.

Resolução

1. **Passo.** Δt = 1 / (20 × 12,0) = 0,00417 s = 4,17 ms. f_s = 240 Hz.
2. **Ride.** N_ride = 240 / 1,56 = 154 pontos por período de ride, bem acima dos 20 pedidos no 6.1.

Resposta. Δt = 4,17 ms (240 Hz), ou 154 amostras por ciclo de ride.

Interpretação. O modelo ficou rígido: o hop é cerca de oito vezes mais rápido que o ride, e o passo cai de 32 ms para 4 ms. É o preço de incluir o pneu e a massa não suspensa, e o tema do exercício 6.28.

Erro comum a evitar. Ficar com os 32 ms do ride num modelo que já tem o pneu, o que deixa o hop com apenas 2,6 amostras por ciclo e pode instabilizar o integrador explícito.

6.9. Duração de um registro amostrado (Básico)

Enunciado. Um arquivo de uma medição de aceleração tem 500 amostras a 100 Hz, incluindo a primeira e a última. Qual é o passo entre amostras e a duração total do registro?

Conceito. A taxa de amostragem fixa o passo, mas a duração de um registro com N pontos igualmente espaçados é (N − 1) Δt, porque há N − 1 intervalos entre N amostras.

Fórmula. `Δt = 1 / f_s , T = (N − 1) Δt`

De onde vem. Definição de frequência de amostragem e de uma grade temporal uniforme que começa em t = 0 na primeira amostra.

Resolução

1. **Passo.** Δt = 1 / 100 = 0,010 s = 10 ms.
2. **Duração.** T = 499 × 0,010 = 4,99 s, e não 5,00 s.

Resposta. Δt = 10 ms e duração de 4,99 s.

Interpretação. A diferença de 0,01 s parece pequena, mas em um ensaio de 500 pontos já é um passo inteiro. Em registros curtos ou em um FFT, usar N / f_s no lugar de (N − 1) / f_s desloca as frequências e o tempo total.

Erro comum a evitar. Reportar 5,00 s, multiplicando 500 × 10 ms, o que conta um intervalo a mais, depois da última amostra.

6.10. Validar uma parada a 80 km/h contra a fórmula fechada (Básico)

Enunciado. Uma simulação de frenagem do up! a 80 km/h, com μ = 0,80, sem reação do motorista e sem arrasto, devolveu 31,60 m até parar. A fórmula s = v² / (2 μ g) do exercício 3.1 dá 31,46 m. Qual é o erro absoluto e o erro relativo, e a simulação passa num critério de 1 %?

Conceito. Toda simulação precisa de um caso de verificação com solução conhecida. O erro relativo contra a fórmula fechada é o primeiro filtro: se ele já for grande num caso simples, o modelo ou o passo não estão prontos para casos mais ricos.

Fórmula. `e = s_sim − s_exata , e_rel = e / s_exata`

De onde vem. Definição de erro absoluto e relativo, com s_exata = v² / (2 μ g) no plano, a constante, v0 = 80/3,6.

Resolução

1. **Referência.** v = 22,22 m/s. s_exata = (22,22)² / (2 × 7,848) = 31,46 m (exercício 3.1, só o trecho de frenagem).
2. **Erros.** e = 31,60 − 31,46 = 0,14 m. e_rel = 0,14 / 31,46 = 0,44 %, abaixo de 1 %: passa no critério.

Resposta. Erro de 0,14 m, ou 0,44 %; passa no critério de 1 %.

Interpretação. Esse excesso de 14 cm é do mesmo tipo do exercício 6.3 (Euler usando v no início do passo). Se o critério fosse 0,2 %, a simulação já não passaria, e seria preciso reduzir Δt ou trocar o integrador.

Erro comum a evitar. Comparar 31,60 m com a distância total de parada do exercício 3.1 (53,68 m), que inclui 1,0 s de reação e não estava no enunciado desta simulação.

6.11. Sensibilidade da potência de cruise ao C_d (Intermediário)

Enunciado. A 100 km/h, no plano, quanto varia a potência nas rodas do up! se C_d muda de 0,01, e qual é a derivada ∂P / ∂C_d?

Conceito. Uma análise de sensibilidade diz o que vale a pena medir melhor. Aqui só o arrasto depende de C_d, e a potência de arrasto é proporcional a C_d v³, então a derivada sai em forma fechada.

Fórmula. `∂P / ∂C_d = (1)/(2) ρ A v³`

De onde vem. P = (C_r m g + ½ ρ C_d A v²) v. Só o segundo termo contém C_d, e derivar em relação a C_d elimina o ½ ρ A v³ como fator constante a v fixo.

Resolução

1. **Derivada.** v = 27,78 m/s. ∂P / ∂C_d = 0,5 × 1,225 × 2,10 × (27,78)³ = 27,57 kW por unidade de C_d.
2. **Variação de 0,01.** ΔP = 27,57 × 0,01 = 0,276 kW, ou 276 W. Em relação aos 11,77 kW do exercício 5.1, são 2,3 %.

Resposta. ∂P / ∂C_d = 27,57 kW por unidade; 0,01 de C_d vale 0,276 kW (2,3 % da potência de cruise).

Interpretação. Duzentos e setenta e seis watts a 100 km/h não são pouco: equivalem a um teto solar ou a um espelho mal alinhado. A sensibilidade cresce com v³, então a 130 km/h o mesmo 0,01 já vale cerca de 0,60 kW.

Erro comum a evitar. Derivar só a força (½ ρ A v² = 993 N) e chamar isso de variação de potência, esquecendo de multiplicar por v.

6.12. Linearizar o arrasto em torno de 20 m/s (Intermediário)

Enunciado. Linearize $F_a = ½ \rho C_d A v^2$ em torno de $v_0 = 20$ m/s e estime F_a a 20,5 m/s. Compare com o valor exato.

Conceito. Muitos controladores e modelos de pequenos sinais trocam v^2 por uma reta tangente. A derivada $dF_a/dv = \rho C_d A v_0$, o dobro do fator $½ \rho C_d A v_0$, e o erro da reta cresce com $(\Delta v)^2$.

Fórmula. $F_a \approx F_a(v_0) + \rho C_d A v_0 (v - v_0)$

De onde vem. Taylor de primeira ordem: $F(v_0+\Delta v) \approx F(v_0) + F'(v_0)\,\Delta v$, com $F' = \rho C_d A v = 2 \times (½ \rho C_d A) v$.

Resolução

1. **Ponto de operação.** $½ \rho C_d A = 0{,}4116$ kg/m. $F_a(20) = 0{,}4116 \times 400 = 164{,}64$ N. $dF/dv = 2 \times 0{,}4116 \times 20 = 16{,}464$ N/(m/s).
2. **Estimativa e exato.** $F_{lin}(20{,}5) = 164{,}64 + 16{,}464 \times 0{,}5 = 172{,}87$ N. $F_{exato} = 0{,}4116 \times 20{,}5^2 = 172{,}97$ N. Erro de 0,10 N, ou 0,06 %.

Resposta. $F_{lin} = 172{,}87$ N e $F_{exato} = 172{,}97$ N, erro de 0,10 N (0,06 %).

Interpretação. Meio metro por segundo em torno de 20 m/s (72 km/h) já é um erro desprezível. Se a linearização for usada de 20 a 30 m/s, o erro salta para $0{,}4116 \times (10)^2 / 1$, na verdade $(\Delta v)^2 \times k = 41$ N, e o modelo de pequenos sinais deixa de servir para a potência de cruise.

Erro comum a evitar. Usar $F' = ½ \rho C_d A v_0$ (metade da derivada), o que daria 168,76 N e um erro dez vezes maior já neste Δv pequeno.

6.13. Um passo do bicycle cinemático (Intermediário)

Enunciado. No modelo bicycle cinemático, o up! vem a 50 km/h com esterço $\delta = 2{,}0°$ constante (ângulo nas rodas). Com $L = 2{,}40$ m e Euler de $\Delta t = 0{,}02$ s, qual é a taxa de guinada e o acréscimo de ângulo de heading nesse passo?

Conceito. No bicycle cinemático não há deriva: o centro instantâneo fica no encontro dos eixos, e a guinada é v / R, com $R = L / \tan\delta$. É o integrador mais simples de uma trajetória de manobra lenta.

Fórmula. $r = v \tan\delta / L$, $\psi_{n+1} = \psi_n + r\,\Delta t$

De onde vem. $R = L / \tan\delta$ no Ackermann de baixa velocidade. $r = v / R$. Euler integra o heading com a taxa do início do passo.

Resolução

1. **Taxa de guinada.** $v = 13{,}89$ m/s. $\delta = 2{,}0° = 0{,}03491$ rad. $\tan\delta = 0{,}03492$. $r = 13{,}89 \times 0{,}03492 / 2{,}40 = 0{,}202$ rad/s $= 11{,}6$ °/s.
2. **Passo de heading.** $\Delta\psi = 0{,}202 \times 0{,}02 = 0{,}00404$ rad $= 0{,}231°$.

Resposta. $r = 0{,}202$ rad/s (11,6 °/s) e $\Delta\psi = 0{,}231°$ no passo de 0,02 s.

Interpretação. A 50 km/h e 2° o raio é cerca de 69 m, uma curva larga. O modelo cinemático vale em baixa velocidade; a 80 km/h já entram as derivas do bicycle dinâmico, que o exercício 4.20 descreveu pelo K_{us}.

Erro comum a evitar. Usar $r = v\,\delta / L$ com δ em graus ($0{,}202 \times 180/\pi$ vezes maior) ou esquecer o tan e, em ângulos maiores, linearizar demais.

6.14. Resposta exata do atraso de pneu a um degrau (Intermediário)

Enunciado. O mesmo pneu do exercício 6.4 (τ = 0,05 s) recebe um degrau de comando u = 3,0° a partir de y(0) = 0. Qual é y em t = 0,05 s, 0,15 s e 0,23 s?

Conceito. A resposta de um sistema de primeira ordem a um degrau é conhecida em forma fechada e serve de referência para validar o Euler do exercício 6.4.

Fórmula. `y(t) = u (1 − exp(−t / τ))`

De onde vem. Solução de τ ẏ + y = u, com u constante e y(0) = 0. Em t = τ a resposta chega a 63,2 % do degrau; em 3τ, a 95 %; em 4,6τ, a 99 %.

Resolução

1. **t = τ = 0,05 s.** y = 3,0 × (1 − e^{−1}) = 3,0 × 0,632 = 1,90°.
2. **t = 3τ = 0,15 s.** y = 3,0 × (1 − e^{−3}) = 3,0 × 0,950 = 2,85°.
3. **t = 0,23 s ≈ 4,6τ.** y = 3,0 × (1 − e^{−4,6}) = 3,0 × 0,990 = 2,97°.

Resposta. y(0,05 s) = 1,90°, y(0,15 s) = 2,85° e y(0,23 s) = 2,97°.

Interpretação. Em 0,15 s o pneu já está em 95 % do pedido. Se o Δt do exercício 6.4 (0,01 s) integrar esse degrau, a solução discreta deve passar perto destes três pontos; se não passar, o passo ou o esquema estão errados.

Erro comum a evitar. Usar 1 − t/τ no lugar da exponencial (linearizar a resposta), o que em t = τ já daria y = 0, e em t > τ sairia negativo ou saturado à mão.

6.15. Corta-alta que não atenue o ride (Intermediário)

Enunciado. Quer-se um filtro passa-baixa de primeira ordem no acelerômetro que atenue no máximo 5 % a 2,0 Hz (ride) e ainda corte o bastante o hop de 12,0 Hz. Qual é a menor frequência de corte que atende os 5 %, e qual é o ganho residual no hop?

Conceito. O ganho de um passa-baixa de primeira ordem é 1 / √(1 + (f/f_c)²). Para não estragar o ride, f_c precisa ficar acima da faixa útil; o hop, mais alto, já entra com alguma atenuação.

Fórmula. `|H(f)| = 1 / √(1 + (f / f_c)²)`

De onde vem. Módulo da função de transferência 1 / (1 + j f/f_c). Pedir |H| ≥ 0,95 em f = 2 Hz é f/f_c ≤ √(1/0,95² − 1) = 0,329, logo f_c ≥ 2 / 0,329.

Resolução

1. **Corte mínimo.** f / f_c = √(1/0,95² − 1) = 0,3287. f_c,mín = 2,0 / 0,3287 = 6,08 Hz.
2. **Hop com esse corte.** |H|(12,0) = 1 / √(1 + (12,0/6,08)²) = 1 / √(1 + 3,89) = 0,452, ou −6,9 dB. Ainda passa 45 % do hop.

Resposta. f_c,mín = 6,08 Hz; no hop resta |H| = 0,452 (−6,9 dB).

Interpretação. Um único polo não consegue preservar 2 Hz e matar 12 Hz ao mesmo tempo: ainda chega 45 % do hop. Para isolar melhor o hop seria preciso um filtro de ordem maior ou uma f_c menor, à custa de começar a atrasar o ride.

Erro comum a evitar. Colocar f_c = 2 Hz, no polo da faixa útil, o que já atenua o ride em 1/√2 = 0,707 (30 %) e atrasa 45° nessa frequência.

6.16. Deriva de energia com Euler explícito no oscilador (Intermediário)

Enunciado. O canto dianteiro é modelado como massa–mola sem amortecimento (209 kg, 20 kN/m), com x(0) = 20 mm e v(0) = 0. Integre 1,00 s com Euler explícito (primeiro atualiza v com a(x_n), depois x com v_n, a velocidade antiga) e Δt = 0,01 s. Compare a energia mecânica final com os 4,00 J iniciais.

Conceito. A energia de um oscilador não amortecido deveria se conservar. O Euler explícito clássico não é simplético: ele injeta energia a cada passo e, neste sistema, é incondicionalmente instável.

Fórmula. $E = (1)/(2)\ k\ x^2 + (1)/(2)\ m\ v^2$

De onde vem. E(0) = ½ k (0,020)² = 4,00 J. O esquema é v_n+1 = v_n + (−k/m) x_n Δt e x_n+1 = x_n + v_n Δt, usando a velocidade antiga na posição (Euler para frente, não o semi-implícito).

Resolução

1. **Energia inicial.** E(0) = ½ × 20 000 × (0,020)² = 4,00 J. O período é 0,641 s, então 1 s cobre cerca de 1,6 ciclos. ω_n Δt = 9,78 × 0,01 = 0,098.
2. **Integração.** Após 100 passos, E(1 s) ≈ 10,37 J, 2,59 vezes a energia inicial. A amplitude cresceu: o método está instável.

Resposta. E(0) = 4,00 J e E(1 s) ≈ 10,37 J, uma razão de 2,59.

Interpretação. A energia quase triplicou em um segundo e meio ciclo: o modelo ‘ganha’ mola e a amplitude explode. Trocar a ordem para x_n+1 = x_n + v_n+1 Δt (Euler semi-implícito, ou Euler–Cromer) já conservaria a energia na média e é o que se usa em dinâmica veicular simples.

Erro comum a evitar. Concluir que o passo de 0,01 s é pequeno demais para ter erro, sem olhar a energia. Em um oscilador, o critério não é só ‘Δt pequeno’, é a estrutura do integrador.

6.17. Estabilidade do Euler explícito no atraso do pneu (Intermediário)

Enunciado. Para o filtro $\tau\,\dot{y} + y = u$ do exercício 6.4, com $\tau = 0{,}05$ s, qual é o maior Δt que mantém o Euler explícito estável? O passo de 0,01 s usado lá está dentro dessa faixa? E um passo de 0,12 s?

Conceito. No Euler explícito, $y_{n+1} = (1 - \Delta t/\tau)\, y_n + (\Delta t/\tau)\, u$. O ganho do estado é $1 - \Delta t/\tau$, e a estabilidade pede que o módulo desse ganho seja menor que 1.

Fórmula. `|1 − Δt / τ| {"<"} 1 ⇒ 0 {"<"} Δt {"<"} 2 τ`

De onde vem. A região de estabilidade do Euler explícito no plano complexo é o disco $|1 + \lambda\,\Delta t| < 1$. Aqui $\lambda = -1/\tau$, real e negativo, e a condição reduz-se a $0 < \Delta t < 2\tau$. No limite $\Delta t = 2\tau$ o ganho é -1 e a solução oscila sem amortecer.

Resolução

1. **Limite.** $\Delta t_{máx} = 2 \times 0{,}05 = 0{,}10$ s.
2. **Os dois passos.** 0,01 s está bem dentro (ganho 0,80, estável e amortecido). 0,12 s passa do limite (ganho $1 - 0{,}12/0{,}05 = -1{,}40$, $|\text{ganho}| = 1{,}40 > 1$): o erro muda de sinal e cresce a cada passo.

Resposta. $\Delta t < 0{,}10$ s. O passo de 0,01 s é estável; o de 0,12 s é instável (ganho $-1{,}40$).

Interpretação. Este filtro, sozinho, tolera até 100 ms. Já o oscilador não amortecido do exercício 6.16 nunca entra nesse disco: os polos estão no eixo imaginário, fora da região do Euler explícito, por menor que seja o passo.

Erro comum a evitar. Usar $\Delta t < \tau$ (0,05 s) como limite, que é um critério de precisão, não de estabilidade — o método ainda é estável entre τ e 2τ, embora oscile em torno da solução.

6.18. Resíduo do balanço de forças numa arrancada (Intermediário)

Enunciado. Uma medição na arrancada do exercício 5.7 registra $a_x = 4{,}10$ m/s², com $F_t = 5\,276$ N e $F_r = 105{,}9$ N. Qual é a aceleração que o balanço translacional simples $(F_t - F_r)/m$ preveria, e qual é o resíduo? Ele é compatível com a inércia rotacional do exercício 5.16?

Conceito. O resíduo é a falha da equação do modelo: $r = (F_t - F_r)/m - a_{medida}$. Um resíduo grande e sistemático aponta um termo que faltou, não um mero ruído de sensor.

Fórmula. `r = (F_t − F_r) / m − a_med`

De onde vem. Segunda lei no plano, só com massa translacional. No exercício 5.16 a massa efetiva era 1 255 kg e a prevista caía para 4,12 m/s².

Resolução

1. **Modelo sem inércia rotacional.** $a_{mod} = 5\,170 / 900 = 5{,}74$ m/s². Resíduo $= 5{,}74 - 4{,}10 = 1{,}64$ m/s².
2. **Com a massa equivalente.** $a_{16} = 5\,170 / 1\,255 = 4{,}12$ m/s². O novo resíduo é $4{,}12 - 4{,}10 = 0{,}02$ m/s², já na ordem do ruído.

Resposta. Resíduo de 1,64 m/s² no modelo só com 900 kg; com $m_{eq} = 355$ kg o resíduo cai para 0,02 m/s², compatível com o exercício 5.16.

Interpretação. Um resíduo de 1,6 m/s² não é ruído: é a inércia do motor e das rodas que o modelo translacional esqueceu. Fechar o resíduo é exatamente o papel de um teste de validação de estrutura, não só de passo de tempo.

Erro comum a evitar. Dividir $F_t - F_r$ pela aceleração medida e chamar 1 261 kg de ‘erro de massa’, sem reconhecer que esse número já é $m + m_{eq}$ do exercício 5.16.

6.19. Erro RMS de três corridas de frenagem (Intermediário)

Enunciado. Três simulações da parada a 100 km/h do exercício 6.3 devolveram 49,86 m, 49,30 m e 49,18 m, contra s_exata = 49,16 m. Calcule o erro de cada uma e o erro RMS das três.

Conceito. O RMS resume um conjunto de erros num único número, na mesma unidade da grandeza, e é o critério usual quando se comparam integradores ou passos de tempo.

Fórmula. $e\_RMS = \sqrt{((e\_1^2 + e\_2^2 + e\_3^2)/(3))}$

De onde vem. Média quadrática dos erros e_i = s_i − s_exata, com igual peso para cada corrida.

Resolução

1. **Erros.** e_1 = 49,86 − 49,16 = 0,70 m. e_2 = 0,14 m. e_3 = 0,02 m.
2. **RMS.** e_RMS = √((0,70² + 0,14² + 0,02²) / 3) = √(0,5100 / 3) = √0,1700 = 0,412 m.

Resposta. Erros de 0,70 m, 0,14 m e 0,02 m; e_RMS = 0,412 m.

Interpretação. O RMS de 41 cm é puxado pelo primeiro passo, grosseiro (Δt = 0,05 s). As duas corridas mais finas já estão em 14 cm e 2 cm; se o critério de validação for RMS < 0,20 m, o conjunto ainda não passa, e o passo largo precisa sair da avaliação.

Erro comum a evitar. Tirar a média aritmética dos erros (0,29 m), que deixa o 0,70 m menos visível, ou calcular o RMS com denominador 2 (variância amostral) quando o pedido é a definição RMS de três resíduos.

6.20. Varredura de C_r na potência a 100 km/h (Intermediário)

Enunciado. No ponto do exercício 5.1 (100 km/h no plano), quanto sobe a potência nas rodas se C_r passa de 0,012 para 0,015? Qual é a derivada ∂P / ∂C_r?

Conceito. Assim como o C_d no exercício 6.11, o C_r entra linearmente na força de rolamento. A varredura de um parâmetro, com os outros fixos, é o teste de sensibilidade mais simples de um modelo de consumo.

Fórmula. $\partial P / \partial C\_r = m\ g\ v\ ,\ \Delta P = m\ g\ v\ \Delta C\_r$

De onde vem. P = (C_r m g + ½ ρ C_d A v²) v, então a derivada em relação a C_r, a v fixo, é m g v.

Resolução

1. **Derivada.** v = 27,78 m/s. ∂P / ∂C_r = 900 × 9,81 × 27,78 = 245,2 kW por unidade de C_r.
2. **Varredura.** ΔC_r = 0,003. ΔP = 245,2 × 0,003 = 0,736 kW. A potência nas rodas sobe de 11,77 kW para 12,50 kW, um acréscimo de 6,3 %.

Resposta. ΔP = 0,736 kW (de 11,77 para 12,50 kW); ∂P / ∂C_r = 245 kW por unidade.

Interpretação. Três milésimos a mais de rolamento — um pneu mais murcho ou um piso mais áspero — custam 736 W a 100 km/h, quase o triplo dos 276 W de 0,01 de C_d no exercício 6.11. Em cruise urbano, o C_r pesa ainda mais, porque o arrasto é menor.

Erro comum a evitar. Variar C_r e recalcular também o arrasto, ou usar ΔP = m g ΔC_r sem multiplicar por v, o que deixaria 26,5 N aparentando ser a variação de potência.

6.21. Um quarto de veículo sobre um obstáculo senoidal (Desafio)

Enunciado. O canto dianteiro (209 kg, k = 20 kN/m, c = 1 200 N·s/m) passa por um obstáculo em meia senoide de 20 mm de amplitude e 0,20 s de duração. Com o piso y(t) imposto e integrador de Euler–Cromer (Δt = 0,5 ms), qual é o pico de deslocamento da massa suspensa em relação ao estático?

Conceito. O modelo de 1 GDL com base móvel é m z¨ = −c (ż − ẏ) − k (z − y). Um obstáculo curto excita sobretudo o transiente de ride, e o pico de z se compara à amplitude do piso.

Fórmula. `m z¨ + c (ż − ẏ) + k (z − y) = 0`

De onde vem. y(t) = A sen(π t / T) em 0 ≤ t ≤ T, e zero depois. Euler–Cromer atualiza primeiro a velocidade com a aceleração atual e depois a posição com a velocidade nova, o que evita a deriva do exercício 6.16.

Resolução

1. **Piso.** A = 0,020 m, T = 0,20 s. A velocidade de pico do piso é A π / T = 0,314 m/s.
2. **Integração.** Com Δt = 0,5 ms e partida do estático, o pico de z é 18,3 mm, um pouco abaixo dos 20 mm do obstáculo: o canto já filtra parte do movimento.

Resposta. O pico de z é 18,3 mm, cerca de 92 % da amplitude do obstáculo.

Interpretação. Um obstáculo de 0,20 s tem frequência típica de 2,5 Hz (meio ciclo), um pouco acima da ride de 1,56 Hz, então a carroceria ainda acompanha quase tudo. Obstáculos mais curtos, perto do hop, inverteriam o papel: o piso se mexeria bem mais do que a massa suspensa.

Erro comum a evitar. Integrar com o Euler explícito clássico e Δt grande, ou medir o pico de z − y (curso da mola, 18,1 mm aqui) e reportá-lo como o deslocamento da carroceria.

6.22. Passo para 1 % de erro de período no hop (Desafio)

Enunciado. No integrador de Verlet (ou Newmark com $\beta = 0$), o erro relativo de período de um oscilador é, no primeiro termo, $(\omega\,\Delta t)^2 / 24$. Qual Δt limita esse erro a 1 % no hop de 12,0 Hz, e a quantos pontos por ciclo isso corresponde?

Conceito. Além da estabilidade, há a precisão de período: um modo que gira rápido demais no tempo discreto acumula fase e desafina a ride e o hop. A fórmula $(\omega\,\Delta t)^2 / 24$ é o termo clássico desse erro em esquemas de segunda ordem centrados.

Fórmula. $|\Delta T / T| \approx (\omega\,\Delta t)^2 / 24$

De onde vem. Expansão de precisão do método da diferença central / Verlet para o oscilador harmônico. $\omega = 2\pi f_{hop}$. Pedir $|\Delta T/T| = 0{,}01$ e isolar Δt.

Resolução

1. **Pulsação.** $\omega = 2\pi \times 12{,}0 = 75{,}40$ rad/s.
2. **Passo.** $(\omega\,\Delta t)^2 / 24 = 0{,}01 \Rightarrow \omega\,\Delta t = \sqrt{0{,}24} = 0{,}490$. $\Delta t = 0{,}490 / 75{,}40 = 0{,}00650$ s = 6,50 ms, ou 12,8 pontos por período.

Resposta. $\Delta t = 6{,}50$ ms, cerca de 12,8 pontos por período de hop.

Interpretação. Seis milissegundos é um pouco mais folgado que os 4,17 ms da regra de 20 pontos do exercício 6.8, mas a ordem é a mesma. O Euler explícito do 6.16 nem entra nessa conversa: ele nem conserva período, ele explode a amplitude.

Erro comum a evitar. Usar $|\Delta T/T| = \omega\,\Delta t / 24$, sem o quadrado, o que daria $\Delta t \approx 0{,}0032$ s e uma exigência enganosa, ou esquecer o 2π e usar $\omega = 12$ rad/s.

6.23. Um passo do modelo bounce–pitch (Desafio)

Enunciado. Com a matriz de rigidez do exercício 4.21 (K11 = 76 000 N/m, K12 = 4 320 N/rad, K22 = 109 382 N·m/rad, m_s = 760 kg, I_y = 919,6 kg·m²), o estado inicial é z = 10 mm, θ = 0, velocidades nulas. Quais são as acelerações nesse instante, e o estado após um passo de Euler–Cromer com Δt = 0,01 s?

Conceito. O modelo 2×2 acopla heave e arfagem. Mesmo com θ = 0, o termo K12 faz o momento aparecer assim que há um heave, e o próximo passo já nasce com um pouco de pitch.

Fórmula. `m_s z¨ = −K11 z − K12 θ , I_y θ¨ = −K12 z − K22 θ`

De onde vem. É a segunda lei nas coordenadas do exercício 4.21, sem amortecimento neste passo de verificação. Euler–Cromer: primeiro as velocidades com essas acelerações, depois as posições com as velocidades novas.

Resolução

1. **Acelerações.** z¨ = −76 000 × 0,010 / 760 = −1,000 m/s². θ¨ = −4 320 × 0,010 / 919,6 = −0,0470 rad/s².
2. **Passo.** ż+ = 0 + (−1,000) × 0,01 = −0,0100 m/s. θ̇+ = −0,000470 rad/s. z+ = 0,010 + (−0,0100) × 0,01 = 9,90 mm. θ+ = −0,00000470 rad = −0,000269°.

Resposta. z¨ = −1,00 m/s², θ¨ = −0,0470 rad/s²; após o passo, z = 9,90 mm e θ = −0,000269°.

Interpretação. O heave de 10 mm já gera um momento (K12 z = 43,2 N·m) que começa a arfar o carro no sentido nariz-para-baixo se z positivo for para baixo no convênio do 4.21, ou o contrário se o sinal de z for para cima — o importante é o acoplamento aparecer no primeiro passo, mesmo com θ inicial nulo.

Erro comum a evitar. Atualizar as posições com velocidade ainda nula e concluir que nada muda no passo, esquecendo que Euler–Cromer usa a velocidade já atualizada, ou ignorar K12 e não ver pitch nenhum.

6.24. Três amostras de μ na distância de frenagem (Desafio)

Enunciado. Num ensaio numérico rápido, o atrito toma os valores 0,70, 0,80 e 0,90, todos igualmente prováveis. Calcule as três distâncias de frenagem a 80 km/h no plano ($s = v^2 / (2\,\mu\,g)$, sem reação) e depois a média e o desvio-padrão amostral (denominador $n - 1$).

Conceito. Uma varredura curta de parâmetro, ou um Monte Carlo de três pontos, já mostra como a distância de parada se espalha quando μ não é um número seco. A incerteza sai com o desvio-padrão amostral.

Fórmula. $s = v^2 / (2\,\mu\,g)$, $\sigma = \sqrt{\left(\Sigma\,(s_i - \bar{s})^2\right)/(n - 1)}$

De onde vem. A mesma fórmula fechada do exercício 3.1, agora com três μ. A média é aritmética e o desvio-padrão é o amostral, com $n - 1 = 2$, adequado a um conjunto pequeno de realizações.

Resolução

1. **Distâncias.** v = 22,22 m/s. s(0,70) = 35,95 m. s(0,80) = 31,46 m. s(0,90) = 27,96 m.
2. **Média e dispersão.** $\bar{s}$ = (35,95 + 31,46 + 27,96) / 3 = 31,79 m. σ = √(((35,95 − 31,79)² + (31,46 − 31,79)² + (27,96 − 31,79)²) / 2) = 4,01 m.

Resposta. s = 35,95 m, 31,46 m e 27,96 m; média 31,79 m e σ amostral = 4,01 m.

Interpretação. Quatro metros de desvio em uma parada de 32 m é muita coisa: variar μ em ±0,10 já espalha a distância de frenagem mais do que o erro de integrador do exercício 6.3. Incerteza de pneu e de piso costuma dominar incerteza numérica.

Erro comum a evitar. Usar o denominador 3 (desvio populacional, 3,27 m) quando o enunciado pede o amostral, ou calcular o desvio das μ e não das distâncias, que não são lineares em μ.

6.25. Interpolação da curva de torque a 5 300 rpm (Desafio)

Enunciado. Uma tabela guarda τ = 110,0 N·m em 5 209 rpm (o canto) e τ = 95,5 N·m em 6 000 rpm. Por interpolação linear, qual é o torque a 5 300 rpm? Compare com o valor exato da hipérbole τ = P_máx / ω, com P_máx = 60 kW.

Conceito. Mapas de motor entram na simulação por interpolação. Entre dois pontos de uma hipérbole de potência constante, a reta não coincide com τ ∝ 1/n, mas o erro é pequeno se os pontos não estiverem muito afastados.

Fórmula. `τ_lin = τ_1 + (τ_2 − τ_1) (n − n_1) / (n_2 − n_1) , τ_exato = P / ω`

De onde vem. Interpolação linear em n, padrão de um lookup 1D. O valor exato na região de potência limitada é 60 000 / ω, com ω = 2π n / 60.

Resolução

1. **Linear.** τ_lin = 110,0 + (95,5 − 110,0) × (5 300 − 5 209) / (6 000 − 5 209) = 110,0 − 14,5 × 91 / 791 = 108,33 N·m.
2. **Exato.** ω = 5 300 × 2π / 60 = 555,0 rad/s. τ_exato = 60 000 / 555,0 = 108,11 N·m. Erro da reta: 0,22 N·m, ou 0,20 %.

Resposta. τ_lin = 108,33 N·m e τ_exato = 108,11 N·m, erro de 0,22 N·m (0,20 %).

Interpretação. Dois pontos separados de 791 rpm já deixam só 0,2 % de erro. Se a tabela pulasse de 4 000 a 6 000 rpm em um único segmento, atravessando o canto, a reta erraria de verdade, porque à esquerda o torque é plano e à direita é hipérbole.

Erro comum a evitar. Interpolar em ω ou em P sem perceber, ou calcular P/ω com n em rpm (60 000/5 300 ≈ 11 N·m), esquecendo o 2π/60.

6.26. Um passo de um piloto PI de cruise control (Desafio)

Enunciado. O controle de velocidade pede 100 km/h e o up! está a 90 km/h. O piloto é u = K_p e + K_i I, com e = v_ref − v, K_p = 50 N/(m/s), K_i = 10 N/(m/s)/s e estado integral I = 2,00 m. Qual é o comando u neste instante e o novo I após um passo de 0,05 s (integração Euler, sem saturação)?

Conceito. Um PI discreto é o coração de um cruise: a proporcional reage ao erro instantâneo e a integral elimina o erro de regime, por exemplo o arrasto que um P puro não vence sozinho.

Fórmula. `u = K_p e + K_i I , I_n+1 = I_n + e Δt`

De onde vem. e está em m/s, I é a integral de e e tem unidade de metro. Euler avança I com o erro do início do passo. u é uma força trativa adicional pedida ao trem de força.

Resolução

1. **Erro e comando.** v_ref = 27,78 m/s, v = 25,00 m/s, e = 2,78 m/s. u = 50 × 2,78 + 10 × 2,00 = 138,9 + 20,0 = 158,9 N.
2. **Integral.** I_n+1 = 2,00 + 2,78 × 0,05 = 2,139 m. No passo seguinte, a parcela integral já seria 21,4 N.

Resposta. u = 158,9 N e I_n+1 = 2,139 m.

Interpretação. Quase 160 N de pedido extra, da ordem da metade do arrasto a 100 km/h (318 N). Sem a integral, um P puro de 50 N/(m/s) precisaria de um erro permanente de 318/50 ≈ 6,4 m/s (23 km/h) só para equilibrar o arrasto — por isso o I existe.

Erro comum a evitar. Calcular e em km/h (e = 10) e obter u = 520 N, três vezes maior, ou atualizar I com u em vez do erro.

6.27. Fator de tempo real de uma corrida (Desafio)

Enunciado. Uma simulação de 10,0 s de dinâmico, com Δt = 1,0 ms, rodou em 0,40 s de relógio. Qual é o fator de tempo real (tempo simulado / tempo de CPU), o número de passos e o tempo médio por passo? Essa corrida rodaria em tempo real?

Conceito. O fator de tempo real (RTF) diz se o modelo cabe em um ECU ou em um HiL. RTF maior que 1 significa mais rápido que o relógio; igual a 1 é tempo real justo; menor que 1 não fecha o passo a tempo.

Fórmula. `RTF = t_sim / t_CPU , N = t_sim / Δt`

De onde vem. Definição usual de real-time factor em simulação veicular. O tempo médio por passo é t_CPU / N, e precisa caber em Δt para haver margem em tempo real.

Resolução

1. **Fator e passos.** RTF = 10,0 / 0,40 = 25. N = 10,0 / 0,001 = 10 000 passos.
2. **Custo por passo.** t_passo = 0,40 / 10 000 = 40 µs, bem abaixo dos 1 000 µs do Δt: a corrida roda em tempo real com folga de 25 vezes.

Resposta. RTF = 25, com 10 000 passos de 40 µs; sim, roda em tempo real com folga.

Interpretação. Uma folga de 25 vezes é confortável para um modelo de veículo em um PC. Se o mesmo modelo for para um HiL com outros 20 modelos de ECU, essa folga some rápido, e aí entram o Δt do hop e o custo de cada passo do exercício 6.28.

Erro comum a evitar. Inverter a razão e reportar RTF = 0,04, concluindo à toa que a simulação é 25 vezes mais lenta que o relógio.

6.28. Rigidez do modelo com pneu e massa não suspensa (Desafio)

Enunciado. Compare os passos recomendados de 20 pontos por período no ride (exercício 6.1) e no hop (exercício 6.8). Qual é a razão de frequências f_hop / f_n, a razão dos passos e o fator pelo qual cresce o custo de uma corrida explícita de mesma duração?

Conceito. Um sistema é rígido quando tem modos muito rápidos e muito lentos. No integrador explícito, o passo segue o modo rápido, e o custo da simulação cresce na mesma razão, mesmo que o interesse seja só o modo lento.

Fórmula. `r_f = f_hop / f_n , r_Δt = Δt_ride / Δt_hop`

De onde vem. Com o mesmo N por período, Δt é inverso da frequência do modo que dita o passo, então r_Δt = r_f. O número de passos em um tempo fixo, e portanto o custo explícito, também escala com r_f.

Resolução

1. **Razão de frequências.** r_f = 12,0 / 1,56 = 7,69.
2. **Passos e custo.** Δt_ride = 32,1 ms, Δt_hop = 4,17 ms, razão 7,69. Uma corrida explícita de 10 s passa de 312 passos para 2 400 passos, cerca de 7,7 vezes mais cara, só por incluir o pneu.

Resposta. f_hop / f_n = 7,69; os passos na mesma razão, e o custo explícito de uma corrida de 10 s cresce cerca de 7,7 vezes (de 312 para 2 400 passos).

Interpretação. Sete a oito vezes é um enrijecimento moderado, típico de um quarto de veículo. Se o pneu for ainda mais rígido, ou se entrar um modo de válvulas ou de end-stop, a razão sobe e o integrador implícito (ou um passo separado para o pneu) começa a valer a pena.

Erro comum a evitar. Somar as frequências ou usar f_hop − f_n como razão, ou achar que o custo cresce com o quadrado da frequência só porque a fórmula do erro de período tem $(\omega\,\Delta t)^2$.

6.29. Euler explícito versus Heun num decaimento viscoso (Desafio)

Enunciado. A velocidade relativa do amortecedor dianteiro obedece $\dot{x} = -(c/m)\,x$, com $c = 1\,200$ N·s/m, $m = 209$ kg e $x(0) = 1{,}00$ m/s. Integre até $t = 0{,}50$ s com $\Delta t = 0{,}05$ s, pelo Euler explícito e pelo Heun (RK2), e compare com a solução exata $x(t) = x_0 \exp(-(c/m)\,t)$.

Conceito. Este é o caso linear em que dá para medir o erro de cada esquema. Heun avalia a derivada também no fim do passo e tira a média, ganhando uma ordem de precisão sobre o Euler explícito.

Fórmula. `x_exato = x_0 exp(−β t) , β = c / m`

De onde vem. Euler: $x_{n+1} = x_n\,(1 - \beta\,\Delta t)$. Heun: $k1 = -\beta\,x$, $k2 = -\beta\,(x + k1\,\Delta t)$, $x_{n+1} = x + (k1 + k2)\,\Delta t / 2$. A solução fechada é a exponencial.

Resolução

1. **Exata.** $\beta = 1\,200 / 209 = 5{,}742\ s^{-1}$. $x(0{,}50) = \exp(-2{,}871) = 0{,}0567$ m/s.
2. **Euler e Heun.** Com 10 passos de 0,05 s, Euler chega a 0,0339 m/s (erro de −0,0227 m/s). Heun chega a 0,0595 m/s (erro de +0,0028 m/s), cerca de oito vezes menor em módulo.

Resposta. $x_{exato} = 0{,}0567$ m/s; Euler dá 0,0339 m/s e Heun 0,0595 m/s, com erros de −0,0227 e +0,0028 m/s.

Interpretação. Com um passo já grosso ($\beta\,\Delta t = 0{,}287$), Euler perde 40 % do valor final. Heun, com o dobro de avaliações da derivada por passo, reduz o erro a 5 %. É o argumento clássico para não usar Euler puro em decaimentos rápidos — o mesmo amortecedor que aparece no quarto de veículo.

Erro comum a evitar. Comparar os dois métodos depois de um único passo, em que os erros ainda são pequenos, ou usar $\beta\,\Delta t > 1$ no Euler (aqui $\Delta t > 0{,}174$ s), o que inverteria o sinal de x a cada passo.

6.30. Parada a 100 km/h com arrasto, contra as fórmulas fechadas (Desafio)

Enunciado. Integre a frenagem do up! a 100 km/h no plano, com $a = \mu g + F_r/m + (\tfrac{1}{2}\rho C_d A v^2)/m$, $\mu = 0{,}80$, até parar. Qual é a distância, e quanto ela encurta em relação ao modelo só com μg e ao modelo com μg e rolamento, sem arrasto?

Conceito. O arrasto e o rolamento ajudam a parar o carro. A fórmula $s = v^2 / (2\,\mu g)$ é portanto um pouco conservadora. Uma simulação com passo fino, ou a quadratura de $v / a(v)$, dá a referência com todos os termos.

Fórmula. $m\,\dot{v} = -\mu\, m\, g - F_r - (1)/(2)\,\rho\, C_d\, A\, v^2$

De onde vem. Balanço longitudinal no plano, com o freio no teto de atrito e as resistências no mesmo sentido da desaceleração. A integração usada no simulador é a regra do trapézio com $\Delta t = 1$ ms, até $v = 0$.

Resolução

1. **Só atrito.** $s_\mu = (27{,}78)^2 / (2 \times 7{,}848) = 49{,}16$ m (exercício 6.3).
2. **Atrito e rolamento.** $a = 7{,}848 + 105{,}9/900 = 7{,}966$ m/s², constante. $s_{\mu,r} = (27{,}78)^2 / (2 \times 7{,}966) = 48{,}43$ m.
3. **Com arrasto.** A integração dá $s = 47{,}39$ m. O arrasto encurta 1,04 m em relação ao modelo com rolamento, e 1,77 m em relação ao só com μg.

Resposta. $s = 47{,}39$ m com arrasto; 48,43 m sem arrasto e 49,16 m só com μg. O arrasto encurta 1,04 m.

Interpretação. Um metro e setenta e sete centímetros a menos que a fórmula de escola $s = v^2 / (2\,\mu g)$ já é visível numa validação bem feita, e vai na direção contrária do excesso do Euler do exercício 6.3. Por isso se valida o integrador num caso sem arrasto, e só depois se liga o termo de v^2 — senão um erro e um fenômeno físico se cancelam e passam despercebidos.

Erro comum a evitar. Somar as três forças e usar a constante $a(v0)$ o tempo todo, o que superestimaria o arrasto médio e encurtaria demais a parada, ou esquecer o rolamento no termo do meio.
